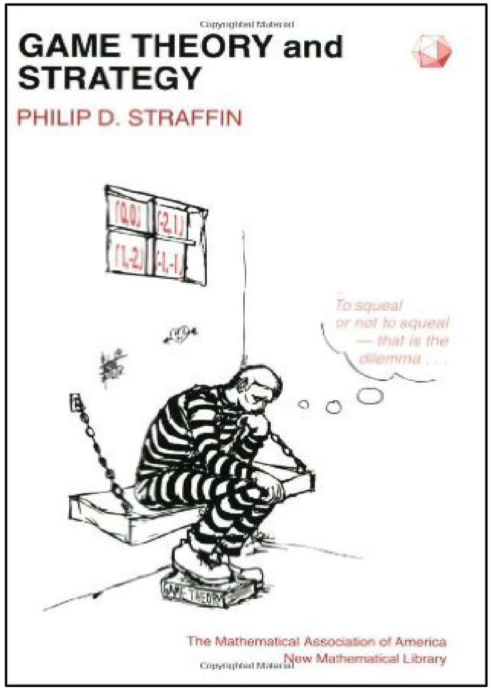
課程名稱：賽局理論與應用

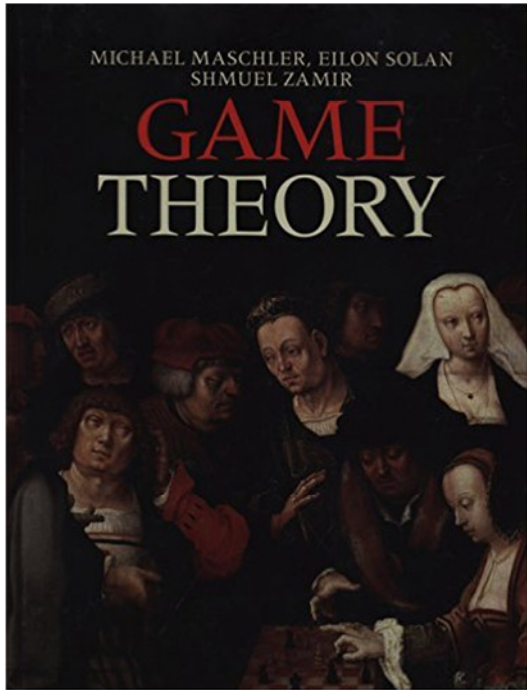
Game Theory and Applications

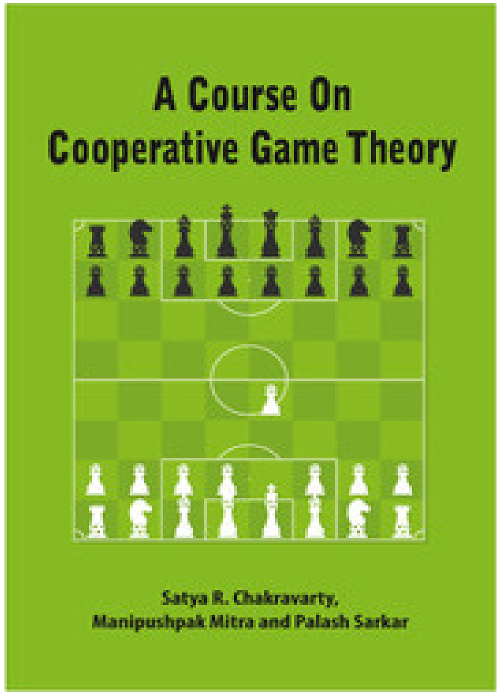
Topic of This Lecture: Coalitional Games

授課教師: 周孜燦
國立中山大學電機系
聯絡方式: ztchou@ee.nsysu.edu.tw

References for This Chapter







◆ **Philip D. Straffin, *Game Theory and Strategy*, Chapters 19, 23, 25, 29, 26, Mathematical Association of America, 1993.**

◆ **M. Maschler, E. Solan, S. Zamir, *Game Theory*, Chapter 19, Cambridge University Press, 2013.**

◆ **S. R. Chakravarty, M. Mitra, P. Sarkar, *A Course on Cooperative Game Theory*, Chapter 5, Cambridge University Press, 2015.**

How to Distribute Payoffs among Players？

2 這塊餅的原料錢是我出的。我要整塊餅的二分之一

3 太多了！我的刀子比較利，我要整塊餅的三分之二

1 既然我們三人合作把餅給做出來了，那該怎麼瓜分比較好？

在先前的章節裡頭，我們已經學到「彼此利益互相衝突」的 players 是可以合作的。現在，假設一個賽局裡頭有 n 個 players。令 $N=\{1,2,\ldots,n\}$ 表示 player set. 假設 player i 和 player j 合作之後，他們所能獲得的 payoff 合起來爲 $v(\{i,j\})$, 或者簡寫爲 $v(i,j)$. 我們想問：如何瓜分 players 合作後所獲得的 payoff 才能讓所有參與合作的 players 都感到滿意？

Game of Divide-a-Pie

讓我們考慮一個「三人分餅賽局」。在此一賽局裡頭，有三位 players 準備瓜分一塊餅。假設單獨任何一位 player 無法把餅給帶走，因此 $v(1) = v(2) = v(3) = 0$. 我們又假設：只要至少二位 players 結盟就能把餅給帶走，因此 $v(1,2) = v(2,3) = v(1,3) = v(1,2,3) = 1$. 請問三人協商分餅，最後 (x_1, x_2, x_3) 的值爲何？其中 $0 \le x_i \le 1$ 表示一塊餅被 player i 瓜分到的比例。

讓我們看一下一個可能的協商過程：

Step 1. Player 1 說：要分就公平分，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$.

Step 2. Player 2 說：誰說一定公平，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.5,\ 0.5)$.

Step 3. Player 1 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.4,\ 0,\ 0.6)$.

Step 4. Player 2 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.3,\ 0.7)$.

Step 5. Player 1 說：player 2，我們何苦相爭？我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.5,\ 0.5,\ 0)$.

Step 6. Player 3 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.6,\ 0,\ 0.4)$.

Step 7. Player 2 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.5,\ 0.5)$.

........此時又回到 Step 2。試問最後三人如何瓜分一塊餅？

Coalitional Game

爲了深入研究「三人分餅賽局」，我們必須對和「分食利益」有關的賽局給予數學上的定義。

[定義 power set] 給定一個集合 $N = \{1,\ 2,\ldots,n\}$, 所有 N 的部分集合所構成的集合稱爲 power set，用符號 2^N 表示。例如：$N = \{1,2,3\}$, 那麼 $2^N = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$, 其中 $\varnothing$ 表示空集合.

[定義 coalitional game] 結盟賽局 coalitional game (亦可稱爲 characteristic-function form game 特徵函數型式賽局 或 合作賽局) 爲一個賽局，裡頭包含 player set $N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ 和特徵函數 $v : 2^N \to \mathbb{R}$，能將每個 N 的部分集合對應到一個實數。給定 $S \subseteq N$, $v(S)$ 表示 S 裡頭的 players 合作之後所能獲得的 payoff 總和。當然，$v(\varnothing) = 0$. 註：N 和 v 爲所有 players 都知道的共同知識 (common knowledge)。

[範例] 三人分餅賽局屬於結盟賽局，在此一賽局裡頭，我們假設 $N = \{1,2,3\}$ 且 $v(1) = v(2) = v(3) = 0,\ v(1,2) = v(2,3) = v(1,3) = v(1,2,3) = 1$.

Super-additive

[定義 super-additive] 給定一個結盟賽局 $G(N,v)$, 若對 N 裡頭任意二個沒有交集的部分集合 $S,T \subseteq N$ 都滿足 $v(S \cup T) \geq v(S)+v(T)$, 則我們稱此一結盟賽局 $G(N,v)$ 具有超加性 (super-additive).

[理念 1] 在結盟賽局中, $v(S \cup T)$ 的值應當至少有 $v(S)+v(T)$, 因為 S 和 T 二派人馬結盟後，就算 S 和 T 裡頭的人互不合作、各作各的，這樣 $v(S \cup T)$ 的值仍可保有 $v(S)+v(T)$. 由於 N 和 v 為共同知識，在 players 事先知道 $v(S \cup T) \leq v(S)+v(T)$ 的情況下，S 和 T 這二派人馬根本不會想合作。因此在具有超加性的結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，必須至少存在二個沒有交集的集合 S 和 T 滿足 $v(S \cup T) > v(S)+v(T)$, 這樣 $G(N,v)$ 裡頭的 players 才會有想結盟合作的動機。

[範例] 三人分餅賽局為具有超加性的賽局，因為 $v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(1,2)=v(2,3)=v(1,3)=v(1,2,3)=1$. 此時每一個 player 都會想和其他 player 結盟；因為 player 若不結盟，其 payoff 為 0.

Inessential

[定義 inessential] 若一個具有超加性的結盟賽局 $G(N,v)$ 滿足 $v(N)=\sum_{i=1}^{n} v(i)$, 則我們說該結盟賽局是不重要的 (inessential)；

$\Rightarrow$ 在不重要的結盟賽局裡頭，每一個 player 都不會想和其他 players 合作。

[定理] 在不重要的結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，對於任意 $S \subseteq N$, 我們有 $v(S)=\sum_{i\in S} v(i)$.

[證明] 反證法。假設存在一個集合 $S \subseteq N$ 滿足 $v(S) > \sum_{i\in S} v(i)$,

那麼 $$\underbrace{v(N) \geq v(S) + v(N \setminus S)}_{\text{根據「超加性」的定義}} \underbrace{> \sum_{i\in S} v(i)}_{\text{根據假設}} + \sum_{i\in N\setminus S} v(i) = \sum_{i=1}^{n} v(i).$$

這違反「不重要結盟賽局」的定義。故假設錯誤。得證。

[假設] 因此，在這個章節裡頭，我們假設所有的結盟賽局都具有超加性、而且是重要的 (因爲不重要的結盟賽局沒啥好研究的)；並且我們不會再提及這個假設。

Two Important Questions

讓我們回顧一下「三人分餅賽局」裡頭 players 的協商過程：

Step 2. Player 2 說：誰說一定公平，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.5,\ 0.5)$.

Step 3. Player 1 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.4,\ 0,\ 0.6)$.

Step 4. Player 2 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.3,\ 0.7)$.

Step 5. Player 1 說：player 2，我們何苦相爭？我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.5,\ 0.5,\ 0)$.

Step 6. Player 3 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.6,\ 0,\ 0.4)$.

Step 7. Player 2 說：player 3，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0,\ 0.5,\ 0.5)$.

........此時又回到 Step 2。

從這個協商過程，我們觀察到：對結盟賽局來說，有二個問題非常重要：

(1) 到底哪些 players 該結盟？

(2) 一旦某些 players 結盟之後，參與結盟的 players 應當如何瓜分合作後所獲得的利益才會彼此都願意接受？

[註] 當然，分配利益的規則會影響 players 結盟的意願，所以 (1) 和 (2) 是互相影響的。

Coalition Structure

爲了回答和 players 結盟有關的問題，我們定義 coalition structure.

[定義 coalition structure] 在結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，聯盟結構（coalition structure）$\mathbb{C}$ 爲 player set N 的 partition。更具體地說，$\mathbb{C}=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 爲一個集合，包含 $1\le m\le n$ 個不爲空集合的聯盟，滿足條件：(1) 對於 $1\le i\le m,\ S_i\subseteq N$, (2) $N=S_1\cup\cdots\cup S_m$, (3) 對任意 $i\ne j,\ S_i\cap S_j=\varnothing$.

[範例] 假設 $N=\{1,2,3,4\}$, $\mathbb{C}_1=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ 爲一個聯盟結構；根據此一聯盟結構，我們知道所有的 players 形成 2 個聯盟，其中一個聯盟包含 players $\{1,2\}$, 另一個聯盟包含 players $\{3,4\}$. $\mathbb{C}_2=\{\{1,2,4\},\{3\}\}$ 也是一個聯盟結構。換句話說，在結盟賽局裡頭，我們要求每個 player 只能加入一個聯盟，因爲我們要求：對所有 $i\ne j,\ S_i\cap S_j=\varnothing$.

Coalition Allocation

[定義 coalition allocation] 對於結盟賽局 $G(N,v)$, 給定聯盟結構 $\mathbb{C}$, 令 x_i 表示 player i 在結盟賽局裡頭所獲得的 payoff。若 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 滿足

(1) 個人理性 (individual rationality); 亦即對所有 player i, $x_i \geq v(i)$.

註：這樣 players 才有結盟的意願。

(2) 聯盟理性 (coalitional rationality); 亦即對所有 $S_k \in \mathbb{C}$, $\sum_{i\in S_k} x_i = v(S_k)$.

註：若 $\sum_{i\in S_k} v(i) < v(S_k)$, 這表示 $(x_1,\ldots,x_n)$ 對聯盟 S_k 來說不是 Pareto optimal，因爲在 S_k 裡頭，每個成員的 payoff 還可增加 $\dfrac{v(S_k)-\sum_{i\in S_k} v(i)}{|S_k|}$.

則我們稱 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 爲「聯盟分配」.

[範例] 在三人分餅賽局的協商過程中，player 1 提議和 player 3 結盟，且提議 $x=(x_1,x_2,x_3)=(0.4,\ 0,\ 0.6)$ $\Rightarrow$ 在 player 1 的提議裡頭 $\mathbb{C}=\{\{1,3\},\{2\}\}$ 且 x 滿足個人理性 $(x_1=0.4\geq v(1)=0,\ x_2=0\geq v(2)=0,\ x_3=0.6\geq v(3)=0)$ 和 聯盟理性 (因爲 $x_1+x_3=v(1,3)=1,\ x_2=v(2)=0$)，因此 x 爲聯盟分配。

Grand Coalition and Imputation

Donald Gillies（1928–1975）
加拿大人，美國伊利諾大學資工系教授，以研究質數、電腦、和賽局聞名

對於結盟賽局裡頭的第一個重要問題「到底哪些 players 該結盟？」

◆ Donald Gillies（吉利斯）認爲：既然我們假設結盟賽局具有超加性，亦即當 $i \notin S$, $v(S)+v(i) \le v(S \cup \{i\}) \le v(N)$, 所以應當鼓勵 players 團結成大聯盟。大聯盟分配 (imputation) $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 爲聯盟分配的特例，滿足

$$\begin{cases} \text{(1) 個人理性 (individual rationality); 亦即對所有 player } i,\ x_i \ge v(i). \\ \text{(2) 大聯盟理性 (total rationality); 亦即 } \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N). \end{cases}$$

[範例] 在三人分餅賽局的協商過程中，player 1 提議 $(x_1,x_2,x_3)=(0.4,\ 0,\ 0.6)$; 雖然此一分配爲聯盟分配，但亦可視爲大聯盟分配，因爲此一分配同時滿足個人理性（$x_i \ge 0$）和大聯盟理性（$x_1+x_2+x_3=v(N)=v(1,2,3)=1$）

Dominated Imputation

讓我們再回顧一下三人分餅賽局裡頭 players 的協商過程：

Step 3. Player 1 說：player 3，和我結盟，我提議 $x=(x_1,x_2,x_3)=(0.4,\ 0,\ 0.6)$.

Step 4. Player 2 說：player 3，和我結盟，我提議 $y=(y_1,y_2,y_3)=(0,\ 0.3,\ 0.7)$.

◆ 在 step 4，player 2 的提議對 player 3 是有吸引力的，因爲對 {2, 3} 這個聯盟來說, $(y_2,y_3)=(0.3,\ 0.7)>(x_2,x_3)=(0,\ 0.6)$. 因此我們有下面的定義：

[定義：相對劣勢的大聯盟分配 dominated imputation] 對於結盟賽局 $G(N,v)$ 來說，若 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 爲一個相對劣勢的大聯盟分配，表示至少存在一個 N 的部分集合 S 和一個聯盟分配 $y=(y_1,\ldots,y_n)$ 使得

$$\begin{cases} (1) \text{ 對所有 } i\in S, \text{ 我們有 } y_i > x_i. \\ (2) \sum_{i\in S} y_i \le v(S). \end{cases}$$

(1) 這意味對 S 的成員來說，y 比 x 更具吸引力

(2) 這確保 y 是一個確實可行的聯盟分配。

[範例] 假設 $v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(1,2)=v(2,3)=v(1,3)=1, v(1,2,3)=1.2$, 那麼 $x=(0.3,\ 0.3,\ 0.6)$ 是一個相對劣勢的大聯盟分配，因爲 $S=\{1,2\}$ 的成員可不經由 player 3 的同意而一起脫離大聯盟，並根據 $y=(0.5,\ 0.5,\ 0)$ 分配利益.

Core

對於「參與結盟的 players 應如何瓜分合作後所獲得的利益？」這個問題，Gillies 認爲：一個相對劣勢的大聯盟分配不是一個好的分配，因爲它不穩定。例如，當 player 1 提議 $x=(0.4,\ 0,\ 0.6)$ 時，player 2 提議 $y=(0,\ 0.3,\ 0.7)$ 便能夠瓦解大聯盟 (因爲 players {2,3} 能夠脫離大聯盟而獲得更高的 payoff)。所以什麼樣的大聯盟分配是穩定的呢？

◆ Gillies (吉利斯) 於 1959 年提出 core，做爲結盟賽局的解。

[定義：core] 結盟賽局 $G(N,v)$ 的 core（用符號 $core(G)$ 表示）爲一群「不爲相對劣勢的大聯盟分配」所構成的集合。也就是說，若大聯盟分配 $x\in core(G)$, 那麼不存在 N 的任意部分集合 S 使得 S 的成員能夠脫離大聯盟而獲得比 $\sum_{i\in S}x_i$ 更高的 payoff。換句話說，若大聯盟分配 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in core(G)$, 那麼對於 N 的任意部分集合 $S\in 2^N\setminus N$, 我們都有 $\sum_{i\in S}x_i\geq v(S)$. 註：這兒沒有考量 $S=N$ 的情況；因爲 x 爲大聯盟分配，所以按定義，當 $S=N$ 時, x 必須滿足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N)$.

Glove Game

player 1
右手套

player 2
左手套

player 3
左手套

現在，我們來看「手套賽局」。在此一賽局中有 3 位 players，其中 player 1 有一隻右手套，而 player 2 和 player 3 各有一隻左手套。一隻手套沒什麼價值；二個左手套也沒人要。所以 player 2 或 player 3 必須和 player 1 結盟才能將手套賣出。假設左右手套合起來可賣 10 元。因此對於此一結盟賽局，我們有 $N=\{1,2,3\}$ 且 $v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(2,3)=0,$ $v(1,2)=v(1,3)=10,\ v(1,2,3)=10.$ 試求手套賽局的 core。

Core of the Glove Game

已知 $N=\{1,2,3\}$ 且 $v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(2,3)=0,\ v(1,2)=v(1,3)=10,$ $v(1,2,3)=10.$ 令 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 表示手套賽局 $G(N,v)$ 的大聯盟分配。

◆ 由於 (x_1,x_2,x_3) 爲大聯盟分配，所以必須滿足條件：

$$\begin{cases} x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \ \ldots\ldots\ldots(1) \\ x_1+x_2+x_3=1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

◆ 若 $(x_1,x_2,x_3)\in core(G)$, 則須滿足下列條件：

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge v(1,2)=1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ x_2+x_3 \ge v(2,3)=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ x_1+x_3 \ge v(1,3)=1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(5) \end{cases}$$

由於 $x_1+x_2+x_3=1$, 所以當條件 (3) 要求 $x_1+x_2\ge 1$ 時，表示 $x_3\le 0.$ 又 $x_3\ge 0.$ 所以我們有 $x_3=0.$ 同理，由於條件 (5) 要求 $x_1+x_3\ge 1,$ 所以 $x_2\le 0.$ 又 $x_2\ge 0.$ 所以我們有 $x_2=0.$ 因此 $x_1=1-(x_2+x_3)=1.$

$\Rightarrow$ 手套賽局的 core 爲 (1, 0, 0). 所有利益由 player 1 一人獨拿！

Why Does Player1 Take All？

讓我們想像一下在手套賽局裡頭一個可能的協商過程：

Step 1. Player 2 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.5,\ 0.5,\ 0)$.

Step 2. Player 3 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.6,\ 0,\ 0.4)$.

Step 3. Player 2 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.7,\ 0.3,\ 0)$.

Step 4. Player 3 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.8,\ 0,\ 0.2)$.

Step 5. Player 2 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.9,\ 0.1,\ 0)$.

Step 6. Player 3 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.99,\ 0,\ 0.01)$.

Step 7. Player 2 說：player 1，和我結盟，我提議 $(x_1, x_2, x_3) = (0.999,\ 0.001,\ 0)$.

....

可預期，只要 player 2 的提議 $(1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2,\ 0)$ 裡頭 ε_2 不為 0，player 3 就會提議 $(1-\varepsilon_3,\ 0,\ \varepsilon_3)$, 其中 $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$; 同理，只要 player 3 的提議 $(1-\varepsilon_3,\ 0,\ \varepsilon_3)$ 裡頭 ε_3 不為 0，player 2 就會提議 $(1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2,\ 0)$, 其中 $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$. Player 2 和 player 3 競相提議的過程會一直持續，直到 ε_2 或 ε_3 其中一個為 0 為止。

Core of a Coalitional Game May Be a Set

雖然在手套賽局裡頭，core 僅包含一個大聯盟分配 (1, 0, 0), 但其實一個結盟賽局 $G(N,v)$ 的 core 有可能包含無窮多個大聯盟分配。

[舉例] $N=\{1,\ 2,\ 3\},\ v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(1,2)=1/4,\ v(1,3)=1/2,$ $v(2,3)=3/4,\ v(1,2,3)=1.$ 此一結盟賽局的 core 為

$$core(G)=\left\{\ (x_1,\ x_2,\ 1-x_1-x_2)\ \middle|\ 0\le x_1\le 1/4,\ 0\le x_2\le 1/2\ \right\}.$$

同學們自己練習看看。

Core of the Divide-a-Pie Game

現在我們來求三人分餅賽局 $G(N,v)$ 的 core。假設 $v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(2,3)=v(1,2)=v(1,3)=v(1,2,3)=1$. 令 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 表示大聯盟分配。

◆ 由於 (x_1,x_2,x_3) 爲大聯盟分配，所以必須滿足條件：

$$\begin{cases} x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \ \ldots\ldots\ldots(1) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

◆ 若 $(x_1,x_2,x_3) \in core(G)$, 則須滿足下列條件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge v(1,2) = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ x_2 + x_3 \ge v(2,3) = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ x_1 + x_3 \ge v(1,3) = 1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(5) \end{cases}$$

由於 $x_1+x_2+x_3=1$, 所以當條件 (3) 要求 $x_1+x_2 \ge 1$ 時，表示 $x_3 \le 0$. 又 $x_3 \ge 0$. 所以 $x_3=0$. 同理可推，$x_1=0$ 且 $x_2=0$. 但 $x_1+x_2+x_3=1$. 矛盾！

所以此題無解 $\Rightarrow$ 三人分餅賽局的 core 爲空集合！ 亦即我們無法找到一個「不爲相對劣勢」的大聯盟分配。難怪協商過程會沒完沒了

Bargaining Set：Basic Idea

時間充分 才講授這個主題

有鑑於 core 可能爲空集合，Robert Aumann （歐曼）於 1964 年提出 bargaining set，做爲結盟賽局的另一種可行解，並保證 bargaining set 不爲空集合。Bargaining set 的理念是建立在下述的協商過程：

Step 1. Player 1 說：要分就公平分，我提議 $x=(x_1,x_2,x_3)=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$.

Step 2. Player 2 對 player 1 抗議/威脅：我覺得 $x_2=1/3$ 太少了，我要求 $x_2=1/2$; 否則我將提議 $y=(y_1,y_2,y_3)=(0,\ 1/2,\ 1/2)$, 並和 player 3 結盟.

Step 3. Player 1 對 player 2 打臉/反擊：你要和 player 3 結盟，我也可以和 player 3 結盟，並且我會提議 $z=(z_1,z_2,z_3)=(1/3,\ 0,\ 2/3)$. 這樣，我仍然保有 1/3; 並且對 player 3 來說，z 這個方案比 y 這個方案更具吸引力！

Step 4. Player 2 無理取鬧：我可向 player 3 提議 $w=(w_1,w_2,w_3)=(0,\ 1/4,\ 3/4)$.

Step 5. Player 1 安慰：你何苦提議 w 呢？根據 w 的分配，你才拿 1/4。如果按我一開始提議的方案 x, 你還可獲得 1/3 呢！

Step 6. Player 2 妥協：好吧，我接受 $x=(x_1,x_2,x_3)=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ 這個提議

◆ 從這個例子我們可看到：任意 player 的抗議都會被打臉，因此所有 players 都會對 $(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$ 這個提議妥協。

Objection

在正式定義 bargaining set 前，我們必須先正式定義「抗議」和「反擊」.

註：bargaining set 並沒要求 players 要形成大聯盟，而是不論聯盟結構爲何，bargaining set 都能給出所有 players 都願意妥協的聯盟分配.

[假設] 在結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，players 的聯盟結構爲 $\mathbb{C}$. 令 $x=(x_1,\ldots,x_n)$ 爲一聯盟分配，亦即對 $k\in N$, $x_k\geq v(k)$ 且對任意 $S_i\in\mathbb{C}$, $\sum_{k\in S_i}x_k=v(S_i)$.

[定義：objection 抗議/威脅] 假設 players i 和 j 屬於相同的聯盟. (註：不同聯盟的 players 不能互相抗議) 對於聯盟分配 x, 若 player i 打算提出「組成新的聯盟 S」來向 player j 抗議 (因爲 player i 覺得 x_i 太小，而 x_j 太大)，這表示存在新的聯盟分配 $y=(y_1,\ldots,y_n)$ 能使得下列條件成立：

(1) $i\in S$ 且 $j\notin S$. 這意味 player i 可組新的聯盟 S 而不需要 player j 的同意。

(2) 對所有 $k\in S$, $y_k>x_k$. 這意味對 S 的成員來說，y 比 x 更具吸引力。

(3) $\sum_{k\in S}y_k=v(S)$. 這確保 player i 的提議可行且達成 Pareto optimal。

[範例] 在三人分餅賽局中，對於大聯盟分配 $x=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, player 2 可提出藉由新的聯盟分配 $y=(0,\ 1/2,\ 1/2)$ 組成聯盟 $\{2,\ 3\}$ 來向 player 1 抗議

Counter-Objection

[定義：counter-objection 打臉/反擊] 對於聯盟分配 x, 當 player i 提出「他打算藉由新的聯盟分配 y 組成新的聯盟 S」來向 player j 抗議時 (因爲 player i 覺得 x_i 太小，而 x_j 太大)，若 player j 能藉由組成新的聯盟 T 來對 player i 反擊 (因爲 player j 不覺得 x_j 太大，他覺得那是他應得的)，這表示存在新的聯盟分配 z 能使得下列條件成立：

(1) $j \in T$ 且 $i \notin T$. 這意味 player j 可組新的聯盟 T 而不需要 player i 的同意。

(2) 對所有 $k \in T,\ z_k \geq x_k$. 對 T 的成員來說，他們覺得 x_k 是最起碼應得的。

(3) $T \cap S = R \neq \varnothing$ 且對 $k \in R,\ z_k \geq y_k$. 對 R 中成員來說，z 比 y 更具吸引力; 因此 player j 可藉由提案 z 來誘使 R 中成員脫離 S, 解除 player i 的威脅.

(4) $\sum_{k \in T} z_k = v(T)$. 這確保 player j 的提案可行且達成 Pareto optimal。

[範例] 在三人分餅賽局中，對於大聯盟分配 $x = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$, 當 player 2 提出透過分配 $y = (0,\ 1/2,\ 1/2)$ 組成新的聯盟 {2, 3} 和來向 player 1 抗議時，player 1 告知他可透過分配 $z = (1/3,\ 0,\ 2/3)$ 組成新的聯盟 {1, 3} 來對 player 2 反擊 (藉由 z 可瓦解 players 2 和 3 的結盟)，藉此表明 $x_1 = 1/3$ 是他應得的。

Invalid Objection

[定義：無效抗議 invalid objection] 給定聯盟分配 x, 若 player i 對 x_i 的值不滿意，進而打算「組成新的聯盟 S」來向同聯盟的成員 player j 抗議時，若下列三個條件裡頭至少有一個成立，表示「player i 對 player j 的抗議」爲無效抗議：

(1) $x_j = v(j)$.

註：player j 單獨一人即可獲得 $v(j) = x_j$, 因此 i 對 j 的抗議無效。

(2) $\sum_{k \in S} x_k \geq v(S)$.

註：聯盟 S 全體合作，payoff 也只有 $v(S)$. 但 $\sum_{k \in S} x_k \geq v(S)$, 因此 player i 的提案無法說服 S 的全部成員。事實上, (1) 或 (2) 成立時，player i 不會提議成立聯盟 S, 自然也就不會對 player j 提出抗議。

但爲解說方便，當 (1) 或 (2) 成立時，我們仍然說「player i 試圖藉由組成新的聯盟 S 來對 player j 的抗議爲無效抗議」.

(3) Player j 可組成新的聯盟 T 來瓦解 S, 其中 $i \in S, j \notin S$ 且 $j \in T, i \notin T$;

亦即存在 $R = S \cap T \neq \varnothing$ 使得 $v(S) - \sum_{k \in S \setminus R} x_k \leq v(T) - \sum_{k \in T \setminus R} x_k$.

◆ 此時 player j 要瓦解 S, 只需誘使 S 裡頭的部分成員 R 脫離 S 即可。因此 R 中成員成為 i 和 j 雙方拉攏的對象。

◆ 按 player i 的提議 y, R 所能獲得的 payoff 為

$\sum_{k \in R} y_k = v(S) - \sum_{k \in S \setminus R} y_k < v(S) - \sum_{k \in S \setminus R} x_k$, 因為對 $k \in S$, $y_k > x_k$.

⇒ 換個角度想：若 $\sum_{k \in R} y_k \geq v(S) - \sum_{k \in S \setminus R} x_k$, $S \setminus R$ 所能獲得的 payoff $\sum_{k \in S \setminus R} y_k = v(S) - \sum_{k \in R} y_k$ 並沒有優於原先的聯盟分配的情況 $\sum_{k \in S \setminus R} x_k$

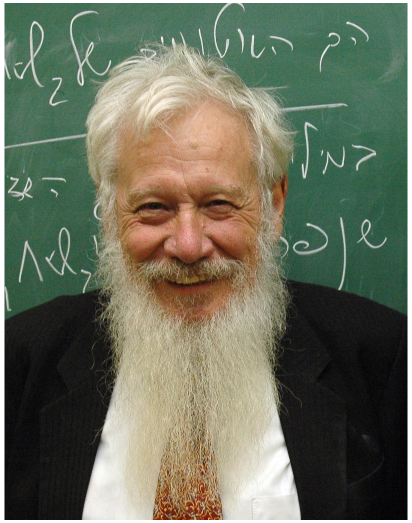
◆ 按 player j 的提議 z, R 所能獲得的 payoff 為

$\sum_{k \in R} z_k = v(T) - \sum_{k \in T \setminus R} z_k \leq v(T) - \sum_{k \in T \setminus R} x_k$, 因為對 $k \in T$, $z_k \geq x_k$.

⇒ 換個角度想：若 $\sum_{k \in R} z_k > v(T) - \sum_{k \in S \setminus R} x_k$, $T \setminus R$ 所能獲得的 payoff $\sum_{k \in S \setminus R} z_k = v(T) - \sum_{k \in R} z_k$ 比原先的聯盟分配的情況 $\sum_{k \in T \setminus R} x_k$ 更糟

◆ 只要 $v(S) - \sum_{k \in S \setminus R} x_k \leq v(T) - \sum_{k \in T \setminus R} x_k$, 就表示 player j 有辦法比 player i 讓 R 獲得更高的 payoff。這樣，player j 便能瓦解 S.

Bargaining Set



Robert Aumann，**1930** 出生，以色列經濟學家，是「相關均衡」和「**bargaining set**」的發明人。**2005** 年獲得諾貝爾經濟學獎，迄今活著

[定義：bargaining set] 假設 x 為在聯盟結構為 $\mathbb{C}=\{S_1,\cdots,S_m\}$ 情況下的聯盟分配。若 x 屬於在聯盟結構為 $\mathbb{C}$ 情況下的 bargaining set $BS(\mathbb{C})$, 這表示對每個聯盟 $S_k \in \mathbb{C}$ 裡頭的每個 player i 來說，就算 player i 對 x_i 的值不滿意，他對 S_k 裡頭的其他成員所提出的抗議皆為無效抗議。

$\Rightarrow$ 這意味每位 player i 都不得不對 x_i 的值妥協。

Relation between Core and Bargaining Set

[定理] 對於結盟賽局 $G(N,v)$, 給定聯盟結構 $\mathbb{C}=\{N\}$, 若 $x \in core(G)$, 則 $x \in BS(N)$. 也就是說，在 players 組成大聯盟的前提下，若結盟賽局的 core 不爲空集合，那麼 core 必爲 bargaining set 的部分集合。

[證明] 對於大聯盟分配 $x \in core(G)$, 若 player i 對 x_i 的值不滿意，進而打算透過「組成新的聯盟 S」來向 player j 抗議時，player i 的提議僅能使得聯盟 S 獲得 $v(S)$; 但 $x \in core(G)$, 按定義，$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. 這意味 player i 的提案無法所說服聯盟 S 的全部成員；亦即根據 x 的安排，任何 player i 所提的抗議都是無效抗議，因此 $x \in BS(N)$.

[範例] 在手套賽局裡頭，core = (10, 0, 0) = bargaining set；因爲就算 player 2 對 $x_2 = 0$ 不滿意，player 2 脫離大聯盟和 player 3 結盟也無法增加 payoff，因爲 $v(2,3)=0$. 另一方面，當 $\mathbb{C}=\{\{1,2\},\{3\}\}$, 亦即在 players 1 和 2 答應結盟的前提下，bargaining set $BS(\mathbb{C})$ 仍然爲 (10, 0, 0). 理由還是一樣，player 2 提不出有效的抗議。

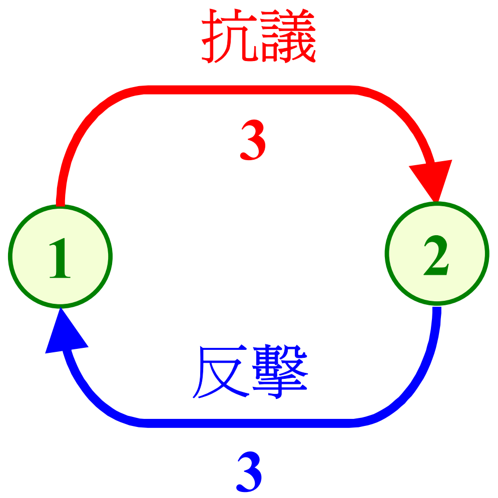
Revisit of the Divide-a-Pie Game

對於三人分餅賽局 $G(N,v)$, 讓我們試著求在 $\mathbb{C}=\{N\}$ 情況下的 bargaining set。要求出 $BS(\mathbb{C})$, 就必須檢查：要滿足什麼條件才能使得對所有可能的 i 和 j, player i 對 player j 的抗議皆為無效抗議。

◆ 首先，我們宣稱：若 $x=(x_1,x_2,x_3)\in BS(N)$, 那麼 x_1,x_2,x_3 裡頭任何一個都不會是 0; 這意味 x_1,x_2,x_3 裡頭任意二個相加不會是 1.

[證明] 反證法。假設 $x=(x_1,x_2,x_3)\in BS(N)$ 且 $x_1=0$. 這意味 $x_2+x_3=1$ 且 $\min\{x_2,x_3\}\le 1/2$. 假設 $x_2=\min\{x_2,x_3\}$. 這意味 $x_3\ge 1/2$. 此時 player 1 可提議新的聯盟分配 $y=(1/3,\ 2/3,\ 0)$, 並和 player 2 組成聯盟 $\{1,2\}$ 來向 player 3 抗議。Player 3 要有辦法反擊 player 1，除非 player 3 能提出新的聯盟分配 z 滿足 $z_2\ge 2/3$ 且 $z_3=x_3\ge 1/2$. 這意味 $z_2+z_3>1$, 但這是不可能的事。這表示 player 3 對 player 1 的抗議無法提出反擊；所以 $(0,x_2,x_3)\in BS(N)$ 這個假設是錯誤的。得證。

◆ 接下來，我們要來求三人分餅賽局的 bargaining set $BS(N)$.



◆ 假設 $x \in BS(N)$. 考慮 player 1 對 x_1 不滿意，並打算和 player 3 結盟來對 player 2 抗議的情況。

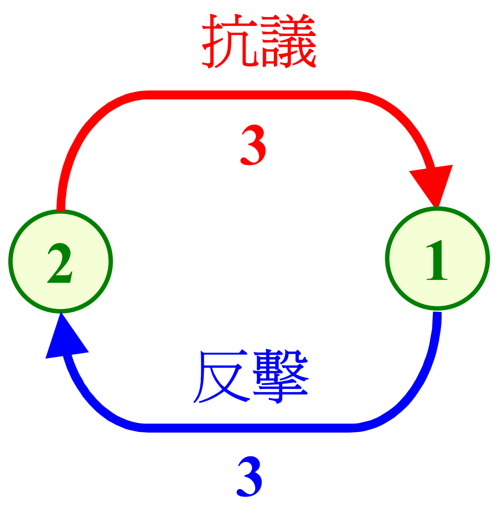
◆ 當 $x_2 = v(2) = 0$ ....(1) 或 $x_1 + x_3 \geq v(1,3) = 1$ ....(2), players {1,3} 不會結盟對 player 2 抗議。但 (1) 和 (2) 不可能成立。 因此我們假設 $x_2 \neq 0$ 且 $x_1 + x_3 < 1$.

◆ 假設 player 1 對 x_1 不滿意，並打算提出新的聯盟分配 y 來吸引 player 3 的結盟。若 players 1 和 3 結盟，player 1 能給 player 3 的 payoff y_3 必然小於 $v(1,3) - x_1$; 否則 $y_1 \leq x_1$ (因爲 $y_1 + y_3 = v(1,3)$)，此時 player 1 沒必要和 player 3 結盟。

◆ 若 player 2 打算提出新的聯盟分配 z 來吸引 player 3 的結盟，藉此解除 player 1 的威脅，那麼 player 2 能給 player 3 的 payoff z_3 最多爲 $v(2,3) - x_2$; 否則 $z_2 < x_2$, 此時 player 2 沒必要和 player 3 結盟。

◆ 只要滿足 $v(1,3) - x_1 \leq v(2,3) - x_2$ ....(3) player 1 就無法對 player 2 提出有效的抗議

◆ 假設 $x \in BS(N)$. 考慮 player 2 對 x_2 不滿意，並打算和 player 3 結盟來對 player 1 抗議的情況。



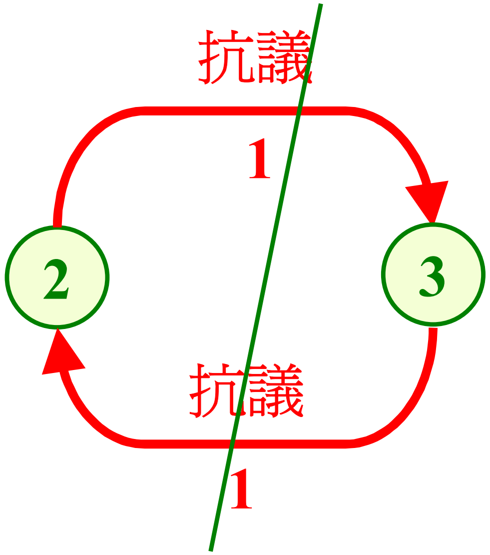
◆ 當 $x_1 = v(1) = 0$ ....(4) 或 $x_2 + x_3 \geq v(1,3) = 1$ ....(5), players {2,3} 不會結盟對 player 1 抗議。但 (4) 和 (5) 不可能成立。 因此我們假設 $x_1 \neq 0$ 且 $x_2 + x_3 < 1$.

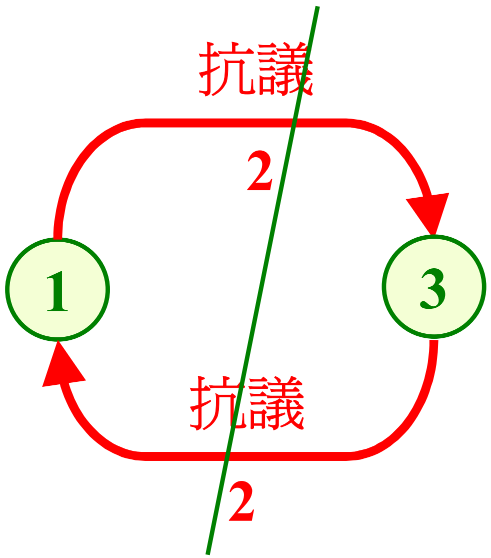
◆ 假設 player 2 對 x_2 不滿意，並打算和 player 3 結盟來對 player 1 抗議。按上頁的推論，當 players 2 和 player 3 結盟時，player 2 能給 player 3 的 payoff 必然小於 $v(2,3) - x_2$.

◆ 若 player 1 打算和 player 3 結盟來解除威脅，那麼 player 1 能給 player 3 的 payoff z_3 最多為 $v(1,3) - x_1$. 因此只要 $v(2,3) - x_2 \leq v(1,3) - x_1$ .....(6) player 2 就無法對 player 1 提出有效的抗議。

◆ 綜合 (3) 和 (6)，當我們要求 players 1 和 2 無法互相抗議時，$v(1,3) - x_1 = v(2,3) - x_2$ ....(7) 必須成立

Bargaining Set of the Divide-a-Pie Game





◆ $\mathbb{C}=\{N\}$. 參考左上圖，若 $x\in BS(\mathbb{C})$, 這表示 players 2 和 3 無法對聯盟分配 x 互相抗議。按投影片上頁的推論，若我們希望 players 2 和 3 無法藉由和 player 1 結盟來互相抗議，則

$v(1,2)-x_2=v(1,3)-x_3$ ....(8) 必須成立

◆ $\mathbb{C}=\{N\}$. 參考左下圖，若 $x\in BS(\mathbb{C})$, 這表示 players 1 和 3 無法對聯盟分配 x 互相抗議。按投影片上頁的推論，若我們希望 players 1 和 3 無法藉由和 player 2 結盟來互相抗議，則

$v(1,2)-x_1=v(2,3)-x_3$ ....(9) 必須成立

◆ 最後，由於 x 爲大聯盟分配，所以我們有

$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0$ 且 $x_1+x_2+x_3=1$ ....(10)

綜合 (7)~(10), 我們可得 $BS(N)=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$.

Deriving Bargaining Set When $n \geq 4$

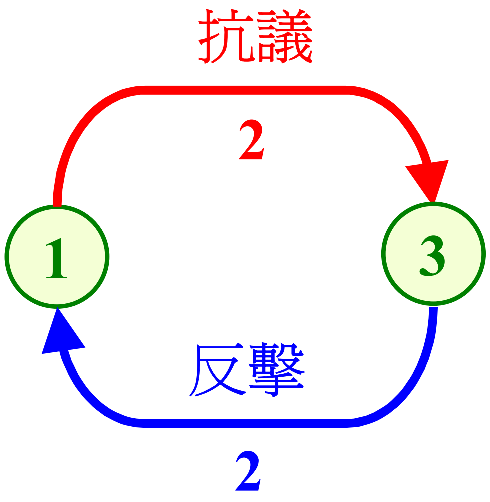
當結盟賽局裡頭 players 總數 $n \geq 4$ 時，求解 bargaining set 的過程就會開始變得超級繁瑣，因爲這時候有非常多種 cases 需要檢查。讓我們看課本裡頭的範例：$N=\{1,2,3,4\},\ v(1)=v(2)=v(3)=v(4)=0,\ v(1,2)=50,$ $v(1,3)=30, v(1,4)=30,\ v(2,3)=v(2,4)=90,\ v(3,4)=70, v(1,2,3)=v(1,2,4)$ $=v(1,3,4)=v(2,3,4)=v(1,2,3,4)=120.$ 令 $\mathbb{C}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$. 試求 $BS(\mathbb{C})$.

[解] 假設 $x \in BS(\mathbb{C})$; 那麼 $x_2=0$ 因爲 $v(2)=0,$ 而且就算 player 2 對 x_2 的值不滿意，他也無人可以抗議，因爲在 $\mathbb{C}$ 裡頭沒有人跟他結盟。

◆ 接著，我們要來求 $x_1,\ x_3,\ x_4$ 的值來使得就算 player i 對 x_i 不滿意，他對 player j 或 player k 所提出的任何抗議都會是無效的抗議，其中 $i \neq j \neq k$ 且 $i,j,k \in \{1,3,4\}$.

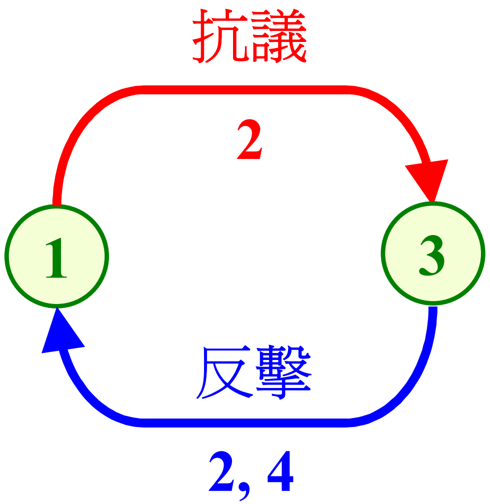
◆ 讓我們首先考慮 player 1 對 player 3 抗議的 case。此時，player 1 可能假藉「和 player 2 聯盟」或「和 player 4 聯盟」或「和 players {2,4} 聯盟」來向 player 3 抗議。我們必須對這些情況一個一個來考慮。

$\mathbb{C}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$. 現在，我們考慮 player 1 藉由「和 player 2 結盟」來向 player 3 抗議的情況。



◆ 若 $x_3=0$ 或 $x_1+x_2 \ge v(1,2)=50$ ....(1), 那麼 players {1, 2} 不會結盟。若 (1) 不成立，players {1, 2} 打算結盟，player 3 有下列二種反擊方式：

◆ 和 player 2 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 2 是雙方拉攏的關鍵，因此 (2) 須成立。$v(1,2)-x_1 \le v(2,3)-x_3$ ....(2)

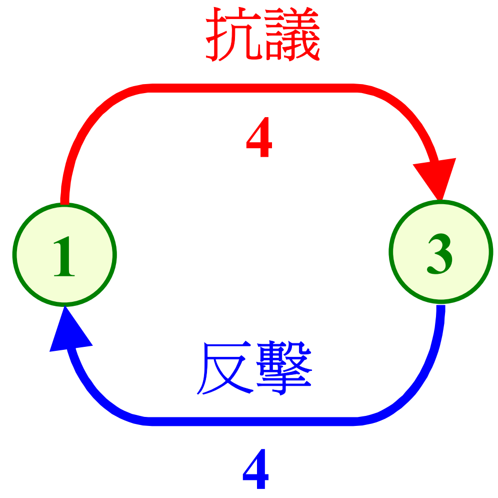


◆ 和 players {2,4} 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 2 是雙方拉攏的關鍵，因此 (3) 須成立。$v(1,2)-x_1 \le v(2,3,4)-x_3-x_4$ ....(3)

◆ 注意：player 3 無法藉由和 player 4 結盟來反擊 player 1, 因爲 $\{1,2\}\cap\{3,4\}=\varnothing$. 亦即 {3,4} 結盟無法瓦解 {1,2} 的形成。

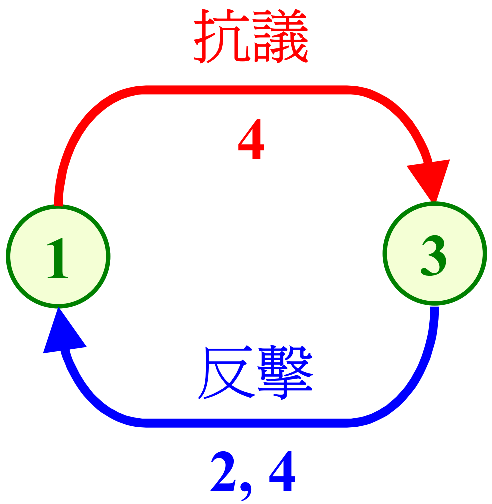
◆ 結論：爲了讓 player 1 藉由和 player 2 結盟來向 player 3 的抗議無效, (1),(2),(3) 其中一個必須成立

$\mathbb{C}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$. 現在，我們考慮 player 1 假藉「和 player 4 結盟」來向 player 3 抗議的情況。



◆ 若 $x_3=0$ 或 $x_1+x_4\geq v(1,4)=30$ ....(4), 那麼 players {1, 4} 不會結盟。若 (4) 不成立，players {1, 4} 打算結盟，player 3 有下列二種反擊方式：

◆ 和 player 4 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 4 是雙方拉攏的關鍵，因此 (3) 須成立。$v(1,4)-x_1\leq v(3,4)-x_3$ ....(5)



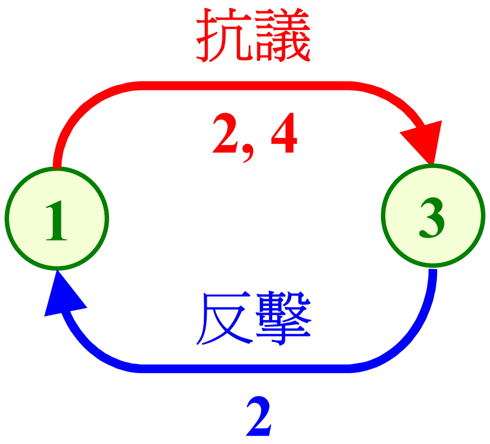
◆ 和 players {2,4} 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 4 是雙方拉攏的關鍵，因此 (4) 須成立。$v(1,4)-x_1\leq v(2,3,4)-x_2-x_3$ ....(6)

◆ 注意：player 3 無法藉由和 player 2 結盟來反擊 player 1, 因爲 $\{2,3\}\cap\{1,4\}=\varnothing$. 亦即 {2,3} 結盟無法瓦解 {1,4} 的形成。

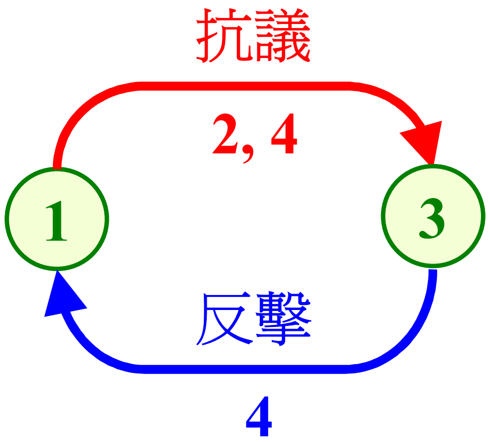
◆ 結論：爲了讓 player 1 藉由和 player 4 結盟來向 player 3 的抗議無效, (4),(5),(6) 其中一個必須成立

$\mathbb{C}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$. 現在，我們考慮 player 1 假藉「和 players 2, 4 結盟」來向 player 3 抗議的情況。

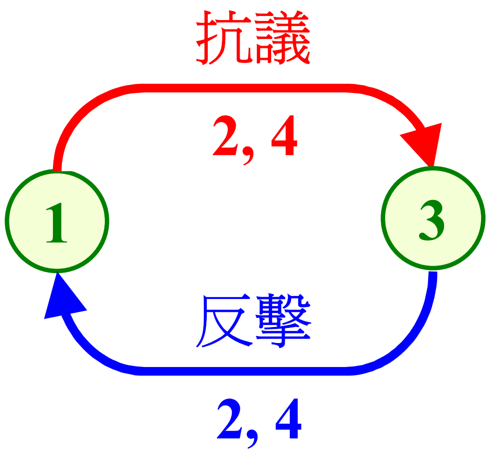
◆ 若 $x_3=0$ 或 $x_1+x_2+x_4 \ge v(1,2,4)=120$ ......(7), players {1,2,4} 不會結盟。若 (7) 不成立，players {1,2,4} 打算結盟，player 3 有下列三種反擊方式：



◆ 和 player 2 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 2 是雙方拉攏的關鍵，因此 (8) 須成立。 $v(1,2,4)-x_1-x_4 \le v(2,3)-x_3$ ....(8)



◆ 和 player 4 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 player 4 是雙方拉攏的關鍵，因此 (9) 須成立。$v(1,2,4)-x_1-x_2 \le v(3,4)-x_3$ ....(9)



◆ 和 players {2,4} 結盟反擊，使得 player 1 的抗議無效。此時 players {2,4} 是雙方拉攏的關鍵，因此 (10) 須成立。$v(1,2,4)-x_1 \le v(2,3,4)-x_3$ ....(10)

◆ 結論：爲了讓 player 1 藉由和 players 2, 4 結盟來向 player 3 的抗議無效, (7)～(10) 其中一個必須成立

Solution

◆ 假設 $\mathbb{C}=\{\{1,3,4\},\{2\}\}$. 我們已經看到，若聯盟分配 $x \in BS(\mathbb{C})$, 則我們必須確保 player 1 無法對 player 3 提出有效的抗議。因此「不等式 (1),(2),(3) 其中一個必須成立」且「不等式 (4),(5),(6) 其中一個必須成立」且「不等式 (7),(8),(9),(10) 其中一個必須成立」.

.... 此時我們要檢查 $C_1^3 \times C_1^3 \times C_1^4 = 36$ 種可能性

◆ 此外，我們還必須確保「player 3 無法對 player 1 提出有效的抗議」且「players 1 和 4 無法針對彼此提出有效的抗議」且「players 3 和 4 無法針對彼此提出有效的抗議」.

◆ 最後，由於 x 爲聯盟分配，因此必須滿足 $x_1 + x_3 + x_4 = v(1,3,4) = 120$. 經過非常冗長地計算之後，我們可求得 $BS(\mathbb{C}) = (30,\ 0,\ 45, 45)$.

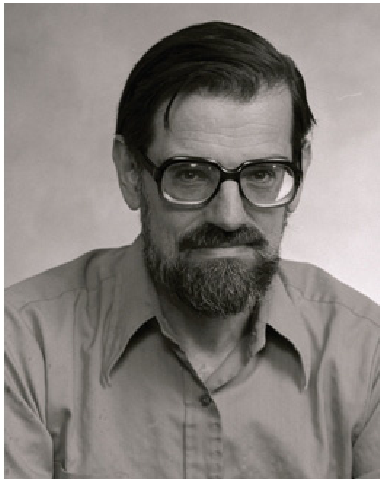
Elements in a Bargaining Set May Be Infinite

雖然在前述的例子裡頭，bargaining set 都只包含一個聯盟分配，但其實給定聯盟結構 $\mathbb{C}$, 結盟賽局的 bargaining set $BS(\mathbb{C})$ 可能包含無窮多個聯盟分配。

[範例] $N=\{1,\ 2,\ 3\},\ v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(1,2)=12,\ v(2,3)=5,$ $v(1,3)=4,\ v(1,2,3)=12.$ 給定 $\mathbb{C}=\{\{1,2\},\{3\}\}$, 此一結盟賽局的 bargaining set 爲 $BS(\mathbb{C})=\left\{\ (x_1,x_2,x_3)\ \middle|\ 4\le x_1\le 7,\ x_2=12-x_1,\ x_3=0\ \right\}.$

同學們自己練習看看。

Shapley Allocation：Another Solution Concept



Llyod Shapley，1923-2016，美國加州大學數學系和經濟系教授，**2012** 年獲得諾貝爾經濟學獎，和 **John Nash** 爲同門師兄弟 **(**指導教授同爲 **Albert W. Tucker)**，以發明 **potential game** 和 **Shapley value** 聞名

◆ 先前所學的 core 和 bargaining set 都是考量「players 的結盟行爲」. 我們假設結盟賽局 $G(N,v)$ 具超加性。因此 core 要求 players 組成大聯盟，並僅包含絕對穩定的大聯盟分配，因此可能爲空集合。

◆ 爲此，bargaining set 不要求 players 必須組成大聯盟，並尋求 players 願意妥協的聯盟分配。但 core 和 bargaining set 的元素個數有可能爲無窮多個，這樣我們很難預測結盟賽局的結果。

◆ Llyod Shapley 於 1953 年提出結盟賽局的另一種可行解，稱爲「夏普立分配 (Shapley allocation)」— 該解必定存在且唯一！

Four Properties of Shapley Allocation (1/2)

◆ 由於我們假設結盟賽局 $G(N,v)$ 具超加性，因此 Shapley 也認爲 players 應該組成大聯盟。夏普立分配爲「具公平性」的分配，依據每個 player 在組成大聯盟過程中所提供的貢獻大小來決定其 payoff。

◆ 更具體地來說，若 $\phi(v)=(\phi_1(v),\phi_2(v),\ldots,\phi_n(v))$ 爲結盟賽局 $G(N,v)$ 的夏普立分配，其中 $\phi_i(v)$ 爲 player i 在結盟賽局中所應得的 payoff，稱爲 player i 的夏普立值 (Shapley value)，那麼 $\phi(v)$ 必須滿足下列四個性質：

(1) Imputation：對所有 $i \in N,\ \phi_i(v) \geq v(i)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N).$

註：既然 Shapley 認爲在結盟賽局具有超加性的情況下，
players 應組成大聯盟，自然「夏普立分配」應當爲「大聯盟分配」.
滿足個人理性 (player 願意合作的前提) 與大聯盟理性。

Four Properties of Shapley Allocation (2/2)

(2) Null Player Property：對任意聯盟 $S \in N \setminus \{i\}$, 若 $v(S \cup \{i\}) = v(S)$, 則我們稱 player i 為 null player (沒有貢獻的 player)。夏普立分配要求：若 player i 為 null player，則 $\phi_i(v) = 0$.

(3) Symmetry：對任意聯盟 $S \in N \setminus \{i, j\}$, 若 $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, 則我們稱 players i 和 j 為 symmetric players (具有相同貢獻的 players)。夏普立分配要求：若 players i 和 j 為 symmetric players，則 $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

(4) Additivity：給定二個具有相同 player set 的結盟賽局 $G(N,u)$ 和 $G(N,w)$, 若我們說結盟賽局 $G(N,v) = G(N,u) + G(N,w)$, 這表示對任意聯盟 $S \subseteq N$, 我們有 $v(S) = u(S) + w(S)$. 令 $\phi(u)$ 和 $\phi(w)$ 分別為 $G(N,u)$ 和 $G(N,w)$ 的夏普立分配，此一性質要求 $G(N,v)$ 的夏普立分配必須為 $\phi(v) = \phi(u) + \phi(w)$. 註：下頁投影片提供有關性質 (4) 的範例。

An Example about Additivity Property

[有關性質 (4) 的範例] 對於結盟賽局 $G(N,u)$, 我們假設 $N=\{1,2,3\}$ 且 $u(1)=u(2)=u(3)=0,\ u(1,2)=2,\ u(1,3)=4,\ u(2,3)=6,\ u(1,2,3)=7.$ 對於結盟賽局 $G(N,w)$, 我們假設 $N=\{1,2,3\}$ 且 $w(1)=w(3)=1,$ $w(2)=0,\ w(1,2)=4,\ w(1,3)=3,\ w(2,3)=5,\ w(1,2,3)=8.$ 如果在結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，$v(1)=w(3)=1,\ w(2)=0,\ \ v(1,2)=6,\ v(1,3)=7,$ $v(2,3)=11,\ v(1,2,3)=15,$ 這表示 $G(N,v)=G(N,u)+G(N,w).$ 假設 $G(N,u)$ 和 $G(N,w)$ 的夏普立分配分配分別爲 $\phi(u)=(8/6,$ 14/6, 20/6) 和 $\phi(w)=(14/6,\ 17/6,\ 17/6).$ 那麼 Additivity 性質要求 $G(N,v)$ 的夏普立分配必須爲 $\phi(v)=\phi(u)+\phi(w)=(22/6,\ 31/6,\ 37/6).$

[評論] 初學者第一次看到性質 (4) 時，通常會覺得合理，但不知道爲何夏普立分配須要具備此一性質。在下頁的證明裡頭，我們將看到性質 (4) 的用途

Shapley Allocation Is Unique：Proof (1/3)

[定理 1] 對於具超加性的結盟賽局 $G(N,v)$, 同時滿足性質 (1)~(4) 的分配必定存在且唯一。

[證明] 利用性質(4)，我們可將一個結盟賽局 $G(N,v)$ 分解成很多的結盟賽局，使得這些結盟賽局只包含 null players (沒有貢獻的 players) 和 symmetric players (具有相同貢獻的 players)。舉例來說，假設在 $G(N,v)$ 裡頭, $N=\{1,2,3\},\ v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(1,2)=2,\ v(1,3)=4,$ $v(2,3)=6,\ v(1,2,3)=7.$ 此時，對每個聯盟 $T\subseteq N$, 我們都製造一個新的結盟賽局 $G(N,v_T)$, 其中 $v_T(S)=\begin{cases}1 & 若\ T\subseteq S,\\ 0 & 其他.\end{cases}$ 例如：在 $G(N,v_{\{1,2\}})$ 裡頭，$v_{\{1,2\}}(1)=v_{\{1,2\}}(2)=v_{\{1,2\}}(3)=v_{\{1,2\}}(1,3)=v_{\{1,2\}}(2,3)=0,$ $v_{\{1,2\}}(1,2)=v_{\{1,2\}}(1,2,3)=1.$ 在 $G(N,v_{\{1,2,3\}})$ 裡頭，$v_{\{1,2,3\}}(1)=v_{\{1,2,3\}}(2)$ $=v_{\{1,2,3\}}(3)=v_{\{1,2,3\}}(1,3)=v_{\{1,2,3\}}(2,3)=v_{\{1,2,3\}}(1,2)=0,\ v_{\{1,2,3\}}(1,2,3)=1.$

Shapley Allocation Is Unique：Proof (2/3)

那麼 $G(N,v) = c_1 G(N,v_{\{1\}}) + c_2 G(N,v_{\{2\}}) + c_3 G(N,v_{\{3\}}) + c_4 G(N,v_{\{1,2\}})$ $+ c_5 G(N,v_{\{1,3\}}) + c_6 G(N,v_{\{2,3\}}) + c_7 G(N,v_{\{1,2,3\}})$, 其中 $c_i \in \mathbb{R}$; 亦即對任意聯盟 $S \subseteq N$, 我們有 $v(S) = c_1 v_{\{1\}}(S) + c_2 v_{\{2\}}(S) + c_3 v_{\{3\}}(S) + c_4 v_{\{1,2\}}(S)$ $+ c_5 v_{\{1,3\}}(S) + c_6 v_{\{2,3\}}(S) + c_7 v_{\{1,2,3\}}(S)$ ....(1). 只要把所有可的 $S \subseteq N$ 代入 (1), 就可求出 $c_1 \sim c_7$ 的值。例：給定 $S = \{1\}$, 我們有 $v(1) = c_1 = 0$; 給定 $S = \{2\}$, 我們有 $v(2) = c_2 = 0$; 給定 $S = \{3\}$, 我們有 $v(3) = c_3 = 0$;

給定 $S = \{1,2\}$, 我們有 $v(1,2) = c_1 + c_2 + c_4 = 2$; 因此 $c_4 = 2$.

給定 $S = \{1,3\}$, 我們有 $v(1,3) = c_1 + c_3 + c_5 = 4$; 因此 $c_5 = 4$.

給定 $S = \{2,3\}$, 我們有 $v(2,3) = c_2 + c_3 + c_6 = 6$; 因此 $c_6 = 6$.

給定 $S = \{1,2,3\}$, 我們有 $v(1,2,3) = \sum_{i=1}^{7} c_i = 7$; 因此 $c_7 = -5$.

[觀察] 在 (1) 裡頭有 7 個未知數 ($c_1 \sim c_7$)，把所有可的 $S \subseteq N$ 代入 (1) 可產生 7 個線性獨立的等式 (為何線性獨立？須要複習線性代數，故省略)，因此 $c_1 \sim c_7$ 的值必定存在且唯一。

Shapley Allocation Is Unique：Proof (3/3)

接著，我們觀察到：給定聯盟 $S \subseteq N$, 在結盟賽局 $G(N, v_S)$ 中，S 裡頭的成員爲 symmetric players，而 $N \setminus S$ 裡頭的成員爲 null players。例如：在 $G(N, v_{\{1,2\}})$ 裡頭，$v_{\{1,2\}}(1) = v_{\{1,2\}}(2) = v_{\{1,2\}}(3) = v_{\{1,2\}}(1,3) = v_{\{1,2\}}(2,3) = 0,$ $v_{\{1,2\}}(1,2) = v_{\{1,2\}}(1,2,3) = 1;$ 此時任意聯盟 $S \subseteq N$ 要能獲利 (亦即 $v(S) > 0$)，除非 S 裡頭包含有 players {1,2}, 且此時 $v(S) = 1$. 這意味在 $G(N, v_{\{1,2\}})$ 裡頭，只有 players {1,2} 不是 null players，且 players 1 和 2 爲 symmetric players。因此按性質 (2) 和 (3), 在結盟賽局 $G(N, v_S)$ 裡頭，S 裡頭的成員和 $N \setminus S$ 裡頭的成員所應得的 payoff 分別爲 $1/|S|$ 和 0. 由於 $G(N,v) = 2G(N, v_{\{1,2\}}) + 4G(N, v_{\{1,3\}}) + 6G(N, v_{\{2,3\}}) - 5G(N, v_{\{1,2,3\}})$, 因此按性質 (4)，players 1, 2, 和 3 在的夏普立値分別爲 $\phi_1(v) = 2\phi_1(v_{\{1,2\}})$

$$+\ 4\phi_1(v_{\{1,3\}}) + 6\phi_1(v_{\{2,3\}}) - 5\phi_1(v_{\{1,2,3\}}) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times 0 - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$\phi_2(v) = 2 \times (1/2) + 4 \times 0 + 6 \times (1/2) - 5 \times (1/3) = 7/3,\ \phi_3(v) = 10/3.$

Marginal Contribution

[定義 marginal contribution] 令 $N = \{1,2,\ldots,n\}$, 令 π 為 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的某個排列，亦表示 players 加入大聯盟的次序。例如：$N = \{1,2,3\}$, $\pi = 231$ 表示 players 依照 $2 \to 3 \to 1$ 的次序加入大聯盟。假設 i 是 π 中第 k 個整數。令 S_k^π 表示包含 π 中第 1 個至第 k 個 players 所構成的聯盟。那麼在 players 依照 π 的次序組成大聯盟的過程中，player i 的邊際貢獻 (marginal contribution) 為 $m_i^\pi(v) = v(S_k^\pi) - v(S_{k-1}^\pi)$.

[範例] 假設在 $G(N,v)$ 裡頭，$N = \{1,2,3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1,2) = 2$, $v(1,3) = 4, v(2,3) = 6$, $v(1,2,3) = 7$. 若 players 依照 $2 \to 3 \to 1$ 的次序加入大聯盟，那麼 player 2 的邊際貢獻為 $m_2^\pi(v) = v(2) = 0$; player 3 的邊際貢獻為 $m_3^\pi(v) = v(2,3) - v(2) = 6$; player 1 的邊際貢獻為 $m_1^\pi(v) = v(1,2,3) - v(2,3) = 7 - 6 = 1$.

Shapley Value of a Player：Formula 1

[定理 2] 令 $N=\{1,\ldots,n\}$. 在具超加性的結盟賽局 $G(N,v)$ 中，若 players 的 payoff 是依據 $\phi(v)=(\phi_1(v),\ldots,\phi_n(v))$ 來分配，其中 $\phi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi} m_i^{\pi}(v)$ 爲 player i 的夏普立值，那麼 $\phi(v)$ 滿足性質 (1)～(4).

[證明] 不難但繁瑣，參見 "A Course on Cooperative Game Theory" 這本書。

組成大聯盟的次序	player 的邊際貢獻		
	1	**2**	**3**
1→2→3	**0**	**2**	**5**
1→3→2	**0**	**3**	**4**
2→1→3	**2**	**0**	**5**
2→3→1	**1**	**0**	**6**
3→1→2	**4**	**3**	**0**
3→2→1	**1**	**6**	**0**
總和	**8**	**14**	**20**

[物理意義] 假設在結盟賽局 $G(N,v)$ 裡頭，$N=\{1,2,3\}, v(1)=v(2)=v(3)=0, v(1,2)=2,$ $v(1,3)=4,\ v(2,3)=6,\ v(1,2,3)=7.$ 觀察左表，players 形成大聯盟的方式只有 $3!=6$ 種，每種發生的機率都相同，爲 1/6。所以平均而言，player 1 的邊際貢獻爲 $8/6$. 同理，players 2 和 3 的邊際貢獻期望值分別爲 14/6 和 20/6. 對照定理 1 裡頭的範例，players 的 payoff 分配方式剛好一樣。

Shapley Value of a Player：Formula 2

[定理 3] 令 $N=\{1,\ldots,n\}$. 在具超加性的結盟賽局 $G(N,v)$ 中，player i 的夏普立值爲 $\phi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi} m_i^{\pi}(v)=\sum_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}\frac{|S|!\left(n-|S|-1\right)!}{n!}\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-v(S)\right].$

[解說] 假設集合 S 一開始爲 $\varnothing$. 接著 players 一個一個加入 S 組成大聯盟。給定特定的 $S\subseteq N\setminus\{i\}$, 當 player i 加盟 S 後，player i 對大聯盟的貢獻爲 $v\left(S\cup\{i\}\right)-v(S)$; 另一方面，所有 players 加盟到大聯盟的次序共有 $n!$ 種。在這 $n!$ 種排列裡頭，其中有 $|S|!$ 種是 S 的成員比 player i 更早加入大聯盟，有 $\left(n-|S|-1\right)!$ 種是 $N\setminus(S\cup\{i\})$ 裡頭的成員比 player i 更晚加入大聯盟，

因此 $\phi_i(v)=\sum_{S\in 2^{N\setminus\{i\}}}\frac{|S|!\left(n-|S|-1\right)!}{n!}\left[v\left(S\cup\{i\}\right)-v(S)\right]$. 如下例，$\phi_1(v)=8/6.$

player 1 加盟 *S* 前，*S* 內部成員的可能性	**$\|S\|! * (n-\|S\|-1)!$**	**$v(S\cup\{i\})-v(S)$**	乘積
空集合	**0! * (3−1)! = 2**	**0**	**0**
{2}	**1! * (3−1−1)! = 1**	**2**	**2**
{3}	**1! * (3−1−1)! = 1**	**4**	**4**
{2,3}	**2! * (3−2−1)! = 2**	**1**	**2**
		總和	**8**

633 和 228 的由來？

假設 player 1 把所有的積蓄都拿去買設備，成立 X 公司。但他身爲老闆，空有公司設備，什麼都不會；因此必須招募員工才有辦法賺錢。假設 players 2 和 3 沒錢，必須去公司上班才有收入。因此我們有 $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ 且 $v(2,3) = 0$.

◆ 情況 1: 假設 players 2 和 3 都很魯蛇，使得這家公司必須三人聯手才有辦法賺錢。假設三人聯手時總共賺 12 元；亦即 $v(1,2) = v(1,3) = 0$ 且 $v(1,2,3) = 12$. 那麼 $\phi(v) = (4,\ 4,\ 4)$.

◆ 情況 2: 假設 players 2 和 3 沒有很魯，因此這家公司只要一個員工即可開始賺錢，且員工人數增加時，公司收入呈現線性成長。假設三人聯手時，總共賺 12 元；亦即 $v(1,2) = v(1,3) = 6$ 且 $v(1,2,3) = 12$. 那麼 $\phi(v) = (3,\ 3,\ 6)$.

◆ 情況 3: 雖然我們還是假設三人聯手時總共賺 12 元，但我們假設 players 2 和 3 超優，只要一人即可獨當一面，因此 $v(1,2) = v(1,3) = v(1,2,3) = 12$. 那麼 $\phi(v) = (2,\ 2,\ 8)$.

自我評量

分別對下列每一題求出 core, bargaining set, 及 Shapley allocation：

[試題 1] 令 $N=\{1,2,3\}=\mathbb{C}$. 在三人分餅賽局中，$v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(1,2)=v(1,3)=v(2,3)=v(1,2,3)=1$. [解答] $core(G)=\varnothing$, $BS(\mathbb{C})=\phi(v)=(1/3,\ 1/3,\ 1/3)$. 此題中，bargaining set 和 Shapley allocation 相同。

[試題 2] 令 $N=\{1,2,3\}=\mathbb{C}$. 在手套賽局中，$v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(1,2)=v(1,3)=1,\ v(2,3)=0,\ v(1,2,3)=1$. [解答] $core(G)=BS(\mathbb{C})=(1,\ 0,\ 0),\ \phi(v)=(2/3,\ 1/6,\ 1/6)$. 此題中，core 和 bargaining set 相同。

[試題 3] 令 $N=\{1,2,3\}=\mathbb{C}$. 假設 $v(1)=v(2)=v(3)=0,\ v(1,2)=60$, $v(1,3)=80,\ v(2,3)=100,\ v(1,2,3)=105$. [解答] $core(G)=\varnothing$, $BS(\mathbb{C})=(15,\ 35,\ 55),\ \phi(v)=(25,\ 35,\ 45)$. 此題中，core, bargaining set, 和 Shapley allocation 三者皆不同。