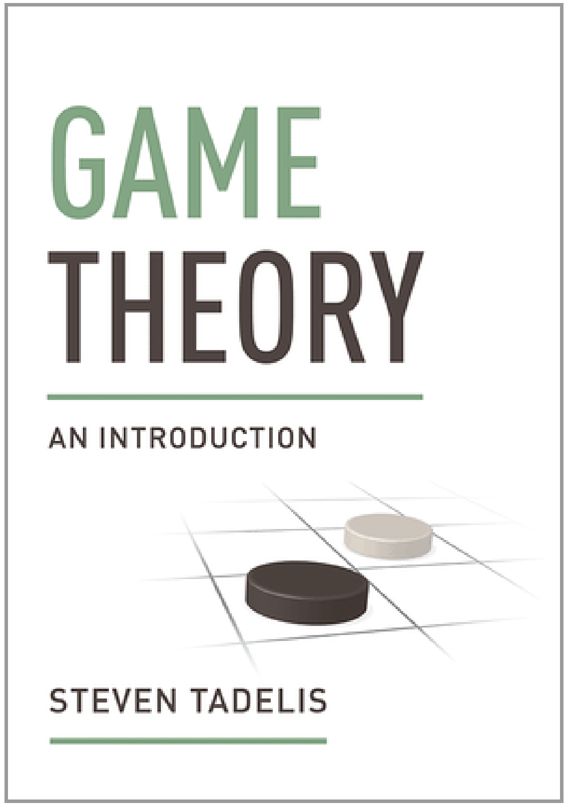
課程名稱：賽局理論與應用

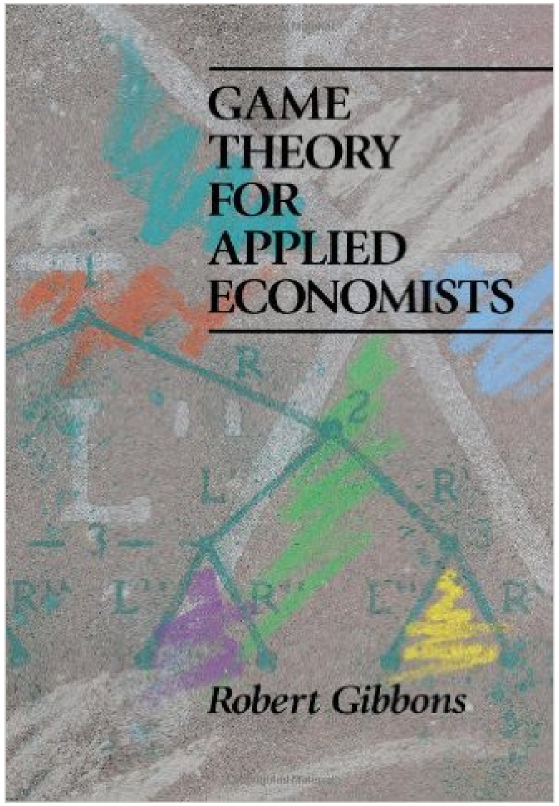
Game Theory and Applications

Topic of This Lecture:
Normal-Form Games
with Incomplete Information

授課教師: 周孜燦
國立中山大學電機系
聯絡方式: ztchou@ee.nsysu.edu.tw

References for This Chapter





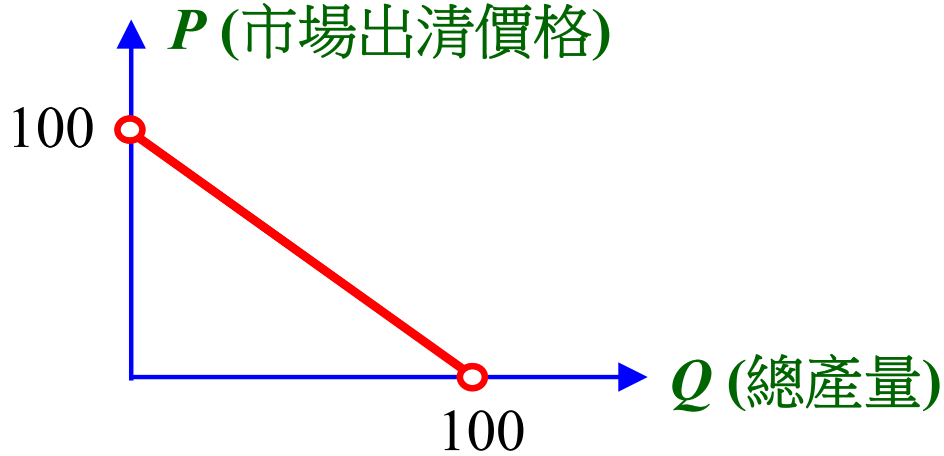
這二本都可
在網路上
找到電子檔。

- **Steven Tadelis, *Game Theory: An Introduction*, Chapter 12, Princeton University Press, 2013.**
- **Robert Gibbons, *Game Theory for Applied Economists*, Chapter 3, Princeton University Press, 1992**

回顧 Cournot Duopoly（古諾雙寡頭產量競爭）

Antoine Augustin
Cournot（1801 – 1877）
古諾，法國經濟學家

[範例 1] 假設某城鎮目前僅二家廠商 F1 和 F2 在生產汽油。假設生產汽油的成本為每公升 10 元。假設 F1 打算生產 s_1 公升， F2 打算生產 s_2 公升。假設按專家預估，要將 $Q = s_1 + s_2$ 公升都銷售一空，每公升汽油的售價應為 $P(Q) = \max\{100 - Q, 0\}$. 那麼 s_1 和 s_2 的值應該如何設定才能使得 F1 和 F2 都最大化自己的 payoff？ 註：假設 s_1 和 s_2 的值皆可為實數



When The Cost of F2 Is Reduced

◆ 假設 player 1 和 player 2 分別生產 s_1 和 s_2 公升。那麼 player 1 和 player 2 的 payoff 分別為 $u_1(s_1,\, s_2) = \left[\underbrace{100 - (s_1 + s_2)}_{\text{市場出清價格}} - \underbrace{10}_{\text{成本}}\right]\underbrace{s_1}_{\text{產量}}$ 和 $u_2(s_1,\, s_2) = [100 - (s_1 + s_2) - 10]s_2$. 令 s_1^* 和 s_2^* 分別表示 player 1 和 player 2 的最佳產量策略。我們有 $s_1^* = 45 - (s_2/2),\ s_2^* = 45 - (s_1/2).$
NE 為 player 1 和 player 2 各生產 30 公升。此時市場出清價格為 $100 - 30 \times 2 = 40$, players 的 payoff 皆為 $u_1(30,30) = u_2(30,30) = 900.$

◆ 若 player 2 的生產成本降為每公升 5 元，那麼此一新的賽局的 NE 為 player 1 生產 $85/3 = 28.33$ 公升、player 2 生產 $100/3 = 33.33$ 公升。此時 player 1 的 payoff 為 $u_1^{新}(85/3,\, 100/3) = 802.77$, player 2 的 payoff 為 $u_2^{新}(85/3,\, 100/3) = 1111.11.$ 我們可觀察到：由於 player 2 的成本下降，因此 payoff 比以往提高，而 player 1 的 payoff 比以往更差。

Cournot Game under Incomplete Information (1/2)

- 由於 F1 和 F2 都是生產汽油的公司，所以 F1 很清楚：如果 F2 的生產成本降為每公升 5 元，工廠必然有很多設備必須更新。如果 F2 的生產設備只有少部分更新，那麼 F2 宣稱擁有新技術，便可能只是虛張聲勢。
- 若 F2 唬爛，而 F1 誤信為真，將產量降至 85/3，此時 F2 的最佳產量為 $45 - [(85/3) /2] = 185/6$，那麼 F2 的獲利 $u_2(85/3, 185/6) = 950.69$，高於 $u_2(30, 30) = 900$. 而 F1 的獲利 $u_1(85/3, 185/6) = 873.6$，低於 $u_1(30, 30) = 900$.
- F1 覺得 F2 有可能在騙人，故意虛張聲勢；但也擔心 F2 的放話是真的，因為 F2 的設備並非完全沒有更新。因此 F1 搞不清楚 F2 的生產成本。

在一個賽局裡頭，如果某個 player i 擁有某個參數 (例：在範例 1 中，F2 的「生產成本」) 是其他 players 所不清楚的，那麼這個參數稱為 type，而這種賽局稱為 incomplete information game (資訊不完全的賽局) 或 Bayesian game (貝氏賽局)。本章研究 players 同時出招的貝式賽局 —— 這樣的賽局稱為「靜態貝式賽局 static Bayesian game」。

Cournot Game under Incomplete Information (2/2)

如果 **F1** 只知道 **F2** 的生產成本下降，但降成多少完全不知道，這樣我們無法分析預測賽局的結果。所以我們要做稍微強烈一點的假設：例如，F1 知道：如果 F2 的設備更新，且研發出新的生產技術，成本可以從 10 降成 5。但是，F1 覺得 F2 有可能只是虛張聲勢，其實成本仍然是 10。所以 **F1** 對 **F2** 的生產成不清楚，但知道有二種，可能是 **5**，也可能是 **10**。

→ 這樣還是不足以預測賽局結果

[範例 2] 假設 **F1** 認為「 **F2** 的生產成本二種，可能是 **5**，也可能是 **10**，並且成本為 **5** 的機率為 **60%**，成本為 **10** 的機率為 **40%**」；此外，**F2** 知道「**F1** 對 **F2** 生產成本的猜測」→ 這樣，我們才有足夠的資訊來預測賽局的結果。請問此時 **F1** 和 **F2** 各應該生產幾公升才能最大化自己的 **payoff**？

數學符號：argmax

自己複習

在往下介紹之前，我們先介紹數學符號 $\arg\max$.

■ 給定二個集合 A 和 B, 假設 $f(x): A \to B$ 是從 A 應對到 B 的函數。

集合 $Y = \arg\max_{x\in A} f(x) = \left\{ z \in A \mid \text{對所有 } x \in A, \text{ 我們都有 } f(z) \geq f(x) \right\}$, 其中

arg 是 argument (參數) 的縮寫。如果 $Y = \left\{x^*\right\}$ 只有一個元素，我們通常

省略集合符號，寫成 $x^* = \arg\max_{x\in A} f(x)$. 註：在數學符號的使用慣例中，

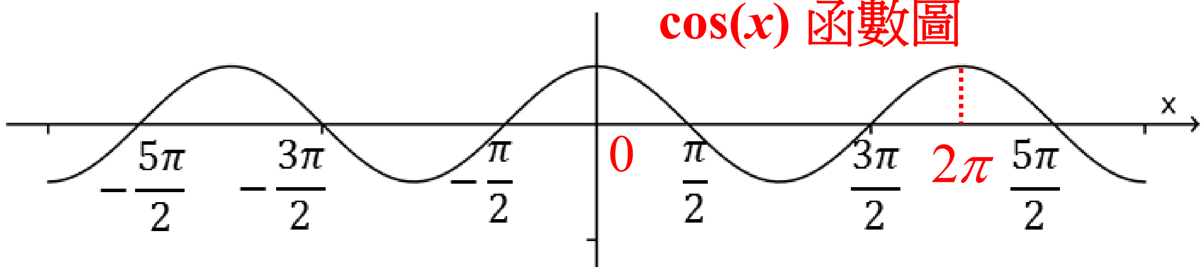
我們用「*」表示「optimal」; 意即 x^* 是能使得 $f(x)$ 產生最佳值的 x 值.

■ 例如：$f(x): \mathbb{R} \to [-1,\ 1]$, $f(x) = \cos(x)$, 那麼 $f(x)$ 的最大值為 1, 且發生

在 $x = 2\pi \times k$ 的時候，其中 $k \in \mathbb{Z}$. 所以 $\arg\max_{x\in[0,2\pi]} \cos(x) = \left\{0,\ 2\pi\right\}$.

■ 例如：$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 且 $f(x) = 3-(x+1)^2$, 那 $f(x)$ 的最大值為 3, 且發生

在 $x = -1$ 的時候。所以 $-1 = \arg\max_{x\in\mathbb{R}} \left[3-(x+1)^2\right]$.



資訊不完全之古諾雙寡頭產量競爭分析 (1/3)

- F2 有二種生產成本。假設在生產成本為 10 的情況下，F2 打算生產 $s_2^*(10)$ 公升汽油；在生產成本為 5 的情況下，F2 打算生產 $s_2^*(5)$ 公升汽油。因為 F1 的生產成本固定（固定為 10），因此我們假設 F1 打算生產 s_1^* 公升汽油

- 廠商 F2 當然知道自己的生產成本。當生產成本為 10 時，$s_2^*(10)$ 的值應當為

$$s_2^*(10) = \arg\max_{s_2(10)} \left[100 - s_1^* - s_2(10) - 10\right] s_2(10)$$

- 廠商 F2 當然知道自己的生產成本。當生產成本為 5 時，$s_2^*(5)$ 的值應當為

$$s_2^*(5) = \arg\max_{s_2(5)} \left[100 - s_1^* - s_2(5) - 5\right] s_2(5)$$

- 雖然 F1 不清楚 F2 的生產成本，但認為生產成本為 10 的機率為 0.4, 生產成本為 5 的機率為 0.6. 此時 F1 會試圖最大化自己 payoff 的期望值。亦即 s_1^* 的值應當為 $s_1^* = \arg\max_{s_1} 0.4\left[100 - s_2^*(10) - s_1 - 10\right] s_1 + 0.6\left[100 - s_2^*(5) - s_1 - 10\right] s_1$

資訊不完全之古諾雙寡頭產量競爭分析 (2/3)

- $s_2^*(10) = \arg\max_{s_2(10)} \left[100 - s_1^* - s_2(10) - 10\right] s_2(10)$

$\Rightarrow s_2^*(10)$ 為 $\dfrac{d}{ds_2(10)}\left[100 - s_1^* - s_2(10) - 10\right] s_2(10) = 0$ 的解

$\Rightarrow s_2^*(10) = 45 - \dfrac{s_1^*}{2}$ ....(1)

- $s_2^*(5) = \arg\max_{s_2(5)} \left[100 - s_1^* - s_2(5) - 5\right] s_2(5)$

$\Rightarrow s_2^*(5)$ 為 $\dfrac{d}{ds_2(5)}\left[100 - q_1^* - q_2(5) - 5\right] q_2(5) = 0$ 的解

$\Rightarrow s_2^*(5) = 47.5 - \dfrac{s_1^*}{2}$ ....(2)

- $s_1^* = \arg\max_{s_1} 0.4\left[100 - s_2^*(10) - s_1 - 10\right] s_1 + 0.6\left[100 - s_2^*(5) - s_1 - 10\right] s_1$

$\Rightarrow s_1^*(10)$ 為 $\dfrac{d}{ds_1}\left\{0.4\left[100 - s_2^*(10) - s_1 - 10\right] s_1 + 0.6\left[100 - s_2^*(5) - s_1 - 10\right] s_1\right\} = 0$

的解 $\Rightarrow s_1^* = 0.4\left[45 - \dfrac{s_2^*(10)}{2}\right] + 0.6\left[45 - \dfrac{s_2^*(5)}{2}\right]$ ....(3)

資訊不完全之古諾雙寡頭產量競爭分析 (3/3)

$$\text{解聯立方程式}\begin{cases} s_2^*(10) = 45 - \dfrac{s_1^*}{2} \quad \text{........................(1)} \\ s_2^*(5) = 47.5 - \dfrac{s_1^*}{2} \quad \text{........................(2)} \\ s_1^* = 0.4\left[45 - \dfrac{s_2^*(10)}{2}\right] + 0.6\left[45 - \dfrac{s_2^*(5)}{2}\right] \quad \text{........(3)} \end{cases}$$

$$\text{可得} \Rightarrow \begin{cases} \text{player 1 的最佳策略為 } s_1^* = 29 \\ \text{player 2 的最佳策略為 } s_2^*(10) = 30.5,\ s_2^*(5) = 33 \end{cases}$$

[對照] 在 F1 和 F2 的生產成本都是 10 的情況下，F1 和 F2 的最佳產量都是 30。但是現在 F2 的生產成本有可能是 5。如果 F2 的生產成本比 F1 還低（只有 5），F2 當然會試圖多生產一些（此時產量 33）。但是在 F2 的生產成本為 10 的情況下，由於 F1 擔心 F2 的生產成本可能只有 5，因此產量會稍微下降成 29；由於 F1 的產量會稍微降低，因此即使 F2 的生產成本為 10，仍可利用這種「資訊不對稱」的優勢，將產量稍微提高至 30.5.

Strategy in a Static Bayesian Game (1/3)

背

◆ [貝氏賽局裡頭策略的定義] 靜態貝氏賽局中，每個 player i 的策略 s_i 是：規劃「自己」在每一種 type 值之下所打算採取的行動。

◆ 你有沒有想過：為何 player 1 的策略固定為 $s_1 = 29$, 為何不能設定為 $s_1' = \begin{cases} 30, & \text{if } t_2 = 10 \\ 28, & \text{if } t_2 = 5 \end{cases}$; 也就是說，為何 player 1不能根據 player 2 的 type 值來調整自己的策略？

◆ s_1' 這個策略能運作的前提是「player 1 知道 player 2 的 type 值」—— 但這違反靜態貝式賽局的假設。

Strategy in a Static Bayesian Game (2/3)

背

◆ [貝氏賽局裡頭策略的定義] 靜態貝氏賽局中，每個 player i 的策略 s_i 是：規劃「自己」在每一種 type 值之下所打算採取的行動。

例如：在範例 1，資訊不完全的古諾賽局中，令 t_i 表示 player i 的成本，那麼 player 2 的策略為 $s_2 = \begin{cases} 30.5, & \text{if } t_2 = 10 \\ 33, & \text{if } t_2 = 5 \end{cases}$.

◆ 你是否覺得奇怪，雖然 player 1 不知道 player 2 的 type 值，但 player 2 確實知道自己的 type 值。如果 player 2 知道自己的成本為 5，為何此時 player 2 的策略不是「產量 = 33」就好，而是「當成本 = 10 時，產量 = 30.5；當成本 = 5 時，產量 = 33」？

Strategy in a Static Bayesian Game (3/3)

背

回想一下，在成本為 5 的情況下，player 2 的最佳策略 $s_2^*(5)$ 是如何決定出來的？此時 player 2 的產量為 $s_2^*(5) = \arg\max_{s_2(5)} \left[100 - s_1^* - s_2(5) - 5\right] s_2(5).$

這意味著要求出 $s_2^*(5)$, 必須事先知道 s_1^* 的值。那 s_1^* 是如何求出來的？

$$s_1^* = \arg\max_{s_1} 0.4\left[100 - s_2^*(10) - s_1 - 10\right]s_1 + 0.6\left[100 - s_2^*(5) - s_1 - 10\right]s_1.$$

這意味即使 player 2 的成本為 5，但要求出 s_1^* 的值，也必須知道在成本為 10 時的最佳策略 $s_2^*(10)$. 所以在靜態貝氏賽局中，每個 player i 的策略 s_i 都必須規劃在每一種可能的 type 值之下所會採取的行動。

註：為了日後更精準地描述靜態貝氏賽局的運作，我們用符號 s_i 表示 player i 的策略；亦即 s_i 是描述 player i 在各種 type 之下所會採取的行動。而我們用符號 $s_i(t_i)$ 表示在 player i 的 type 值為 t_i 的情況下，player i 所會採取的行動。如果 player i 只有一種 type t_i, 那麼 $s_i = s_i(t_i)$.

When the Cost of F1 Is Also Uncertain

[範例 3] 假設在 F2 宣布擁有新的生產技術後，F1 也即刻宣布擁有新的生產技術。F2 對此半信半疑，認為 F1 有 50% 的機率能將生產成本降為 5，但生產成本維持為 10 的機率也有 50%。另一方面，雖然 F1 和 F2 所採用的技術不同，但生產汽油的關鍵設備都是由 F3 公司所提供。因此 F1 和 F2 都認為：如果自己擁有新的生產技術，那麼對方很可能也擁有新的生產技術；反之，若自己尚未開發出新的生產技術，那麼對方很可能也處在高成本的狀態。下表具體顯示 F1 和 F2 之間有關 type 的機率。請問此時 F1 和 F2 的最佳產量策略為何？

		player 2 的 type (成本)		
	機率	10	5	
player 1 的 type (成本)	10	0.3	0.2	0.5
	5	0.1	0.4	0.5
		0.4	0.6	

Definition of a Static Bayesian Game (1/3)

背

對於一個資訊不完全的同時出招賽局（incomplete information normal form game，或者稱為 static Bayesian game 靜態貝氏賽局），我們用符號 $G_B = \left(N, \{T_i\}, \{A_i\}, \phi, \{u_i\}\right)$ 表示，而 G_B 包含下列五個要素：

1. $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ 為 player set，表示由所有 players 所構成的集合。
2. T_i 為 player i 的 type set，表示 player i 所有「可能」的 type 值所構成的集合。例如，在範例 3 裡頭，player 的 type 為汽油可能的生產成本，所以我們有 $T_1 = T_2 = \{5,\ 10\}$.
3. A_i 為 player i 的 action set，表示由 player i 所能夠採取的行動所構成的集合。例如：在範例 3 裡頭，player i 的 action set 為 (0,100], 亦即所有可能的產量所構成的集合。注意：我們假設不論 player i 的 type 值為何，他的 action set 都一樣；否則任何 player 都可以根據「player i 所能夠採取的 action set (這是 common knowledge)」得知 player i 的 type 值。

注意

Definition of a Static Bayesian Game (2/3)

4. $\phi: T_1 \times \ldots \times T_n \to [0,1]$ 為 type distribution；意即我們用符號 $\phi(t_1,\ldots,t_n)$ 表示「player 1 的 type 為 $t_1 \in T_1$」且「player 2 的 type 為 $t_2 \in T_2$」… 且「player n 的 type 為 $t_n \in T_n$」的機率；當然，$\sum_{(t_1,\ldots,t_n)\in T_1\times\ldots\times T_n} \phi(t_1, \ldots, t_n) = 1.$ 下表為範例3 的情況，此時 $\phi(10,10) = 0.3,\ \phi(10,5) = 0.2.$ 令 $\phi_i(t_i)$ 表示 player i 的 type 為 t_i 的機率，則 $\phi_i(t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \phi(t_i, t_{-i}).$ 以下表為例，player 1 的 type 為 10 的機率 $\phi_1(10) = \phi(10,10) + \phi(10,5) = 0.5,$ player 2 的 type 為 10 的機率 $\phi_2(10) = \phi(10,10) + \phi(5,10) = 0.3 + 0.1 = 0.4.$ 注意：$\phi_1(10)\times\phi_2(10) = 0.5\times 0.4 = 0.2 \neq \phi(10,10) = 0.3.$ 這意味，player 1 的 type 值和 player 2 的 type 值之間未必互相獨立。

例如：生產汽油的某個設備只有 F3 公司獨有，這導致 F1 和 F2 這二家的汽油生產成本因 F3 而相關。

	機率	player 2 的 type (成本)	
		10	**5**
player 1 的 type (成本)	**10**	**0.3**	**0.2**
	5	**0.1**	**0.4**

Definition of a Static Bayesian Game (3/3)

5. u_i: $(T_1 \times A_1) \times (T_2 \times A_2) \times \ldots \times (T_n \times A_n) \to \mathbb{R}$ 為 player i 的 payoff (utility) function. u_i 這個函數表示：在已知每個 player k 的 type $t_k \in T_k$ 及其採取的行動 $a_k \in A_k$ 之下，player i 所能獲得的 payoff 為 $u_i\big((t_1,a_1),\ldots,(t_n,a_n)\big)$.

以 範例 3 來說，假如 player 1 的 type t_1 為 10，產量 a_1 為 30 (並非最佳產量)；假如 player 2 的 type t_2 為 5，產量 a_2 為 35 (並非最佳產量).
此時 player 1 和 player 2 的 payoff 分別為

$$\begin{cases} u_1\big((t_1,a_1),(t_2,a_2)\big) = u_1\big((10,30),(5,35)\big) = [100-30-35-10]30 = 750, \\ \\ u_2\big((t_1,a_1),(t_2,a_2)\big) = u_2\big((10,30),(5,35)\big) = [100-30-35-5]35 = 1050. \end{cases}$$

Playing Model of a Static Bayesian Game

John Harsanyi（1920-2000）出生於匈牙利王國，後歸化美國。1994 年和 John Nash 一起獲得諾貝爾經濟學獎

靜態貝氏賽局於 1967 年由 John Harsanyi (哈尚義) 首先提出，其運作過程依序如下：

1. 每個 player i 都有自己的 type set T_i 及 action set A_i. 所有 players 都知道 T_i 與 A_i.（註：不論 player i 的 type 值為何，A_i 都相同）
2. 所有 players 對 type distribution ϕ 都完全知道
3. 每個 player 按 $\left(\{T_i\},\{A_i\},\phi,\{u_i\}\right)$ 推導出自己的最佳策略 $s_i : T_i \rightarrow A_i$.（註：其實每個 player 都能推導出其他 players 的最佳策略）
4. Nature (上帝) 按 type distribution ϕ 指派每個 player i 的 type 值 t_i; 這個 t_i 值只有 player i 自己知道，別的 players 無從得知，只能推測。
5. 所有 players 同時出招，其中 player i 採取行動 $s_i(t_i)$, 並獲得 payoff $u_i\left(s_1(t_1),\ s_2(t_2),\ \ldots,\ s_n(t_n)\right)$.

Expected Payoff of a Player under a Type (1/2)

	機率	player 2 的 type (成本)		
		10	**5**	
player 1 的 type (成本)	**10**	**0.3**	**0.2**	**0.5**
	5	**0.1**	**0.4**	**0.5**
		0.4	**0.6**	

- 再回頭來看 [範例3]。故事假設：F1 和 F2 在尋求新的生產技術之前，F1 和 F2 都認為「F1 開發出新技術的機率為 0.5，F2 開發出新技術的機率為 0.6」。更具體地說，F1 和 F2 都認為將來「F1 的成本為 10 且 F2 的成本為 10 的機率為 0.3」「 F1 的成本為 5 且 F2 的成本為 10 的機率為 0.1 」。詳細其況如上表所示。

- 在 F1 和 F2 都宣稱有新技術之後，如果 F1 的成本仍然為 10 (F1 虛張聲勢)，**那麼在「F1 成本為 10」的前提下**，F2 的成本也為 10 的機率（注意：其實是條件機率）為 Pr(F2 的成本為 10 | F1 的成本為 10) = 0.3/0.5 = 0.6.

Expected Payoff of a Player under a Type (2/2)

		player 2 的 type (成本)		
	機率	10	5	
player 1 的 type (成本)	10	0.3	0.2	0.5
	5	0.1	0.4	0.5
		0.4	0.6	

◆ 故事假設：在雙方都宣稱有新技術之後，同時出招賽局便開始進行。假設：當 F1 的生產成本為 10，F1 打算生產 $s_1^*(10)$ 公升；當 F1 的生產成本為 5，F1 打算生產 $s_1^*(5)$ 公升。當 F2 的生產成本為 10，F2 打算生產 $s_2^*(10)$ 公升；當 F2 的生產成本為 5，F2 打算生產 $s_2^*(5)$ 公升。

◆ F1 當然清楚自己的成本。在成本仍為 10 的情況下，F1 應該設定 $s_1^*(10)$ 的值為

$$s_1^*(10)=\arg\max_{s_1(10)\in(0,100]}\left\{\frac{0.3}{0.5}\times\left[100-s_2^*(10)-s_1(10)-10\right]\times s_1(10)+\frac{0.2}{0.5}\times\left[100-s_2^*(5)-s_1(10)-10\right]\times s_1(10)\right\}=BR_1(s_2^*\mid t_1=10).$$

◆ $s_1^*(10)=\arg\max_{s_1(10)\in(0,100)}\Big\{(0.3/0.5)\times\big[100-s_2^*(10)-s_1(10)-10\big]\times s_1(10)$

$+(0.2/0.5)\times\big[100-s_2^*(5)-s_1(10)-10\big]\times s_1(10)\Big\}=BR_1(s_2^*\mid t_1=10).$

$\Rightarrow s_1^*(10)=45-\frac{1}{2}\big[0.6\times s_2^*(10)+0.4\times s_2^*(5)\big]$ .... (1)

◆ $s_1^*(5)=\arg\max_{s_1(5)\in(0,100)}\Big\{(0.1/0.5)\times\big[100-s_2^*(10)-s_1(5)-5\big]\times s_1(5)$

$+(0.4/0.5)\times\big[100-s_2^*(5)-s_1(5)-5\big]\times s_1(5)\Big\}=BR_1(s_2^*\mid t_1=5).$

$\Rightarrow s_1^*(5)=47.5-\frac{1}{2}\big[0.2\times s_2^*(10)+0.8\times s_2^*(5)\big]$ .... (2)

◆ $s_2^*(10)=\arg\max_{s_2(10)\in(0,100)}\Big\{(0.3/0.4)\times\big[100-s_2(10)-s_1^*(10)-10\big]\times s_2(10)$

$+(0.1/0.4)\times\big[100-s_2(10)-s_1^*(5)-10\big]\times s_1(10)\Big\}=BR_2(s_1^*\mid t_2=10).$

$\Rightarrow s_2^*(10)=45-\frac{1}{2}\big[0.75\times s_1^*(10)+0.25\times s_1^*(5)\big]$ .... (3)

◆ $s_2^*(5)=\arg\max_{s_2(5)\in(0,100)}\Big\{(0.2/0.6)\times\big[100-s_2(5)-s_1^*(10)-5\big]\times s_2(5)$

$+(0.4/0.6)\times\big[100-s_2(5)-s_1^*(5)-5\big]\times s_2(5)\Big\}=BR_2(s_1^*\mid t_2=5).$

$\Rightarrow s_2^*(5)=47.5-\frac{1}{2}\big[(1/3)\times s_1^*(10)+(2/3)\times s_1^*(5)\big]$ .... (4)

【解答】

$s_1^*(10)=29.62$

$s_1^*(5)=31.72$

$s_2^*(10)=29.93$

$s_2^*(5)=31.99$

Action Set為實數區間：用Best Response求BNE

◆ 假設 player i 的 type 值為 t_i. 在此一的情況下，雖然 player i 不知道其餘 players 的 types 值為何，但能推算出其餘 players 的 types 為 t_{-i} 的條件機率為 $\phi_i(t_{-i} \mid t_i)$. 此時 player i 選擇 $s_i(t_i) \in A_i$ 所能獲得的 payoff 條件期望值為 $u_i(s_i(t_i),\ s_{-i}) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \phi_i(t_{-i} | t_i) \times u_i(s_i(t_i),\ s_{-i}(t_{-i}))$.

背

◆ [BNE 定義 1]：若 $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ 為 Bayesian Nash Equilibrium (簡寫成 BNE), 那麼對每一個 player i 的每一個 type 值 t_i, 我們都有 $s_i^*(t_i) = BR_i(s_{-i}^* | t_i) = \arg\max_{s_i(t_i) \in A_i} \{u_i(s_i(t_i),\ s_{-i}^*)\}$, 其中 $u_i(s_i(t_i),\ s_{-i}^*) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \phi_i(t_{-i} | t_i) \times u_i(s_i(t_i),\ s_{-i}^*(t_{-i}))$.

◆ 利用上述定義求出 BNE 的作法比較 (並非絕對) 適用於每個 player i 的 action set A_i 為實數區間的情況，因為此時我們令 $\frac{du_i(s_i(t_i),\ s_{-i}^*)}{ds_i(t_i)} = 0$ 可求出 $s_i^*(t_i) = BR_i(s_{-i}^* | t_i)$. 如果每個 player i 的 action set A_i 裡頭的元素個數有限，我們有另一種簡便的方法可以求出 BNE，參見下頁投影片的範例。

不清楚對手是誰的囚犯賽局

機率 p		**player 2** t_2 = 小明家人 m (不認罪)	**player 2** t_2 = 小明家人 f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −3
	F (認罪)	−3, −5	−6, −6

機率 $1-p$		**player 2** t_2 = 小明同事 m (不認罪)	**player 2** t_2 = 小明同事 f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −1
	F (認罪)	−1, −5	−4, −4

[範例 4] 「小明」和「小華」是雙胞胎兄弟，他們和公司同事「小美」三人持槍到處砸店。結果遇到警察，二人被捕，另一人在逃。被捕的二個人中，其中一人為「小明」；另一人是誰，小明不清楚，暫且稱為「player 2」。這二人被隔離偵訊。如果小明和 player 2 是家人，他們將面臨左表所示的囚犯賽局；如果小明和 player 2 是同事，他們將面臨右表所示的囚犯賽局。已知 player 2 為小明家人 (小華) 的機率為 p。試求此一貝氏賽局的 BNE。

BNE求法：先求每種type組合下的PSNE

		player 2 t_2 = 小明家人	
	機率 p	m (不認罪)	f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −3
	F (認罪)	−3, −5	−6, −6

		player 2 t_2 = 小明同事	
	機率 $1-p$	m (不認罪)	f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −1
	F (認罪)	−1, −5	−4, −4

- 左表的 NE 為 (M, m), 右表的 NE 為 (F, f). Player 2 知道自己的 type，也知道 player 1 是小明。當 player 2 為小明家人時，player 2 會選擇 m; 當 player 2 為小明同事時，player 2 會選擇 f.
- 小明選擇 M 的 payoff 為 $p\times u_1^{左表}(M, m)+(1-p)\times u_1^{右表}(M, f)=p\times(-2)+(1-p)\times(-5)=3p-5$, 選擇 F 的 payoff 為 $p\times u_1^{左表}(F, m)+(1-p)\times u_1^{右表}(F, f)=p\times(-3)+(1-p)\times(-4)=p-4$. 當 $3p-5\geq p-4$, 小明選擇 M, 否則選擇 F.

「先求每種type組合下的PSNE」是爛招

		player 2 t_2 = 小明家人	
	機率 p	m (不認罪)	f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −3
	F (認罪)	−3, −5	−6, −6

		player 2 t_2 = 小明同事	
	機率 1−p	m (不認罪)	f (認罪)
player 1 t_1 = 小明	M (不認罪)	−2, −2	−5, −1
	F (認罪)	−1, −5	−4, −4

上述的 BNE 求法雖然正確，但該方法只適用在「每種 type 組合之下的 payoff 矩陣僅有一個 PSNE」的情況。如果每種 type 組合之下的 payoff 矩陣有多個 PSNE (左下表的情況)、或者沒有 PSNE (右下表的情況)，這種 BNE 的求法便失效。

機率 1/3		player 2 $t_2 = 1$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	3, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 3

機率 2/3		player 2 $t_2 = 2$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	3, 0	0, 1
	B	0, 3	1, 0

Step 1：求出每個 Player 的 Pure Strategy Set

機率 1/3		player 2 $t_2=1$	
		L	R
player 1 $t_1=1$	T	3, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 3

機率 2/3		player 2 $t_2=2$	
		L	R
player 1 $t_1=1$	T	3, 0	0, 1
	B	0, 3	1, 0

- [範例 5] 上面二表所示，player 2 的 type 有二種。試求此賽局的 BNE。
- 想求 BNE，我們首先必須將 incomplete-info. normal form game 轉成 complete-info. normal form game，因為我們只會處理 complete-info. normal form game。要轉成 complete-info. normal form game，我們必須先找出每個 player 的 pure strategy set (純策略集：所有可能的純策略所構成的集合)
- 我們用符號 $s_2 = LR = L[t_2=1] + R[t_2=2]$ 表示「player 2 的純策略為：如果 type 值為 1 就採用 L, 如果 type 值為 2 就採用 R」. 那麼 player 2 的純策略集為 $\{LL, LR, RL, RR\}$, 而 player 1 的純策略集為 $\{T, B\}$.

記住

注意：player 1 的策略不可以是 $s_1 = TB = T[t_2=1] + B[t_2=2]$, 因為這表示 player 1 知道 player 2 的 type 值，這違反貝氏賽局的定義。

Pure Strategy versus Behavioral Strategy

機率 1/3		player 2 $t_2=1$	
		L	R
player 1 $t_1=1$	T	3, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 3

機率 2/3		player 2 $t_2=2$	
		L	R
player 1 $t_1=1$	T	3, 0	0, 1
	B	0, 3	1, 0

- 假設 player i 的 action set $A_i=\{a_1,\ldots,a_m\}$. 令 $s_i(t_i)$ 表示 player i 的 type 值為 t_i 的情況下所採取的策略。假設：不論 t_i 的值為何，$s_i(t_i)$ 皆為 A_i 中的某個元素，意即 $s_i(t_i)\in A_i$, 那麼我們說：player i 採用純策略。例：$s_1=T,\ s_2(t_2=1)=L,\ s_2(t_2=2)=R.$
- 若 player i 的策略為 $s_i(t_i)=\sigma_i(a_1)[a_1]+\cdots+\sigma_i(a_m)[a_m]$, 其中 $\sigma_i(a_j)\geq 0$ 表示行動 a_j 被採用的機率，例如：$s_1=3/4[T]+1/4[B],\ s_2(t_2=1)=4/5[L]+1/5[R],\ s_2(t_2=2)=1/4[L]+3/4[R]$. 那麼我們說：player i 採用行為策略 (也就是：依據 type 值而定的混合策略)。本章只考慮「所有 players 皆採用純策略」的情況；有關行為策略的介紹，留待第七章。

Step 2：求出每個Strategy Profile的Payoff Profile

機率 1/3		player 2 $t_2 = 1$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	3, 1	0, 0
	B	0, 0	1, 3

機率 2/3		player 2 $t_2 = 2$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	3, 0	0, 1
	B	0, 3	1, 0

背

◆ 給定 players 的 strategy profile $s = (s_i, s_{-i})$, 那麼 player i 所能獲得的 payoff 期望值為 $u_i(s_i,\ s_{-i}) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \sum_{t_i \in T_i} \phi(t_i, t_{-i}) \times u_i\big(s_i(t_i),\ s_{-i}(t_{-i})\big)$.

[舉例] 令 G_k 表示 player 2 的 type 為 k 的 normal-form game。那麼左表為 G_1, 右表為 G_2. 令 $u_1^{[k]}(T, L)$ 表示在 G_k 中 player 1 採用 T, player 2 採用 L 時，player 1 所能獲得的 payoff。假設 $s_1 = T,\ s_2 = LR$, 則 $u_1\big(T,\ LR\big) =$

$\phi(t_1 = 1, t_2 = 1) \times u_1^{[1]}(T, L) + \phi(t_2 = 1, t_2 = 2) \times u_1^{[2]}(T, R) = (1/3) \times 3 + (2/3) \times 0 = 1.$

$u_2\big(T,\ LR\big) = \phi(t_1 = 1, t_2 = 1) \times u_2^{[1]}(T, L) + \phi(t_2 = 1, t_2 = 2) \times u_2^{[2]}(T, R)$

$= (1/3) \times 1 + (2/3) \times 1 = 1.$

Step 3：用貝氏賽局矩陣找出BNE

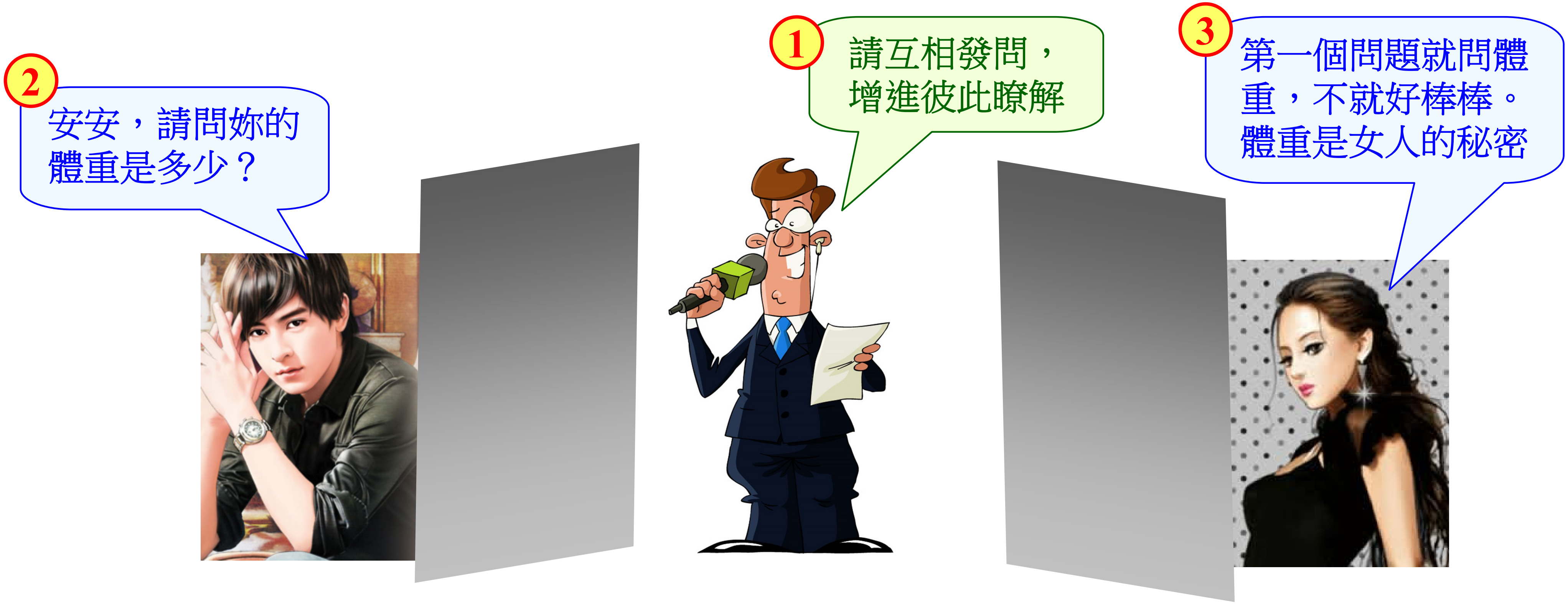
[BNE 定義 2：比較適用 A_i 的元素個數為有限的情況] 若 $s^* = \left(s_1^*, \ldots, s_n^*\right)$ 為 BNE，表示對 player i 所有可能的策略 s_i, 我們都有 $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$, 其中 $u_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \sum_{t_i \in T_i} \phi(t_i, t_{-i}) \times u_i\left(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})\right).$

背

		player 2			
		LL	***LR***	***RL***	***RR***
player 1	***T***	**3, 1/3**	**1, 1**	**2, 0**	**0, 2/3**
	B	**0, 2**	**2/3, 0**	**1/3, 3**	**1, 1**

現在，我們可將範例 5 的靜態貝氏賽局 (incomplete-info. normal form game) 轉成 complete-info. normal form game，如上表所示。在上表中，player 2 已經沒有任何 type 值，因為 player 2 的 type 值被隱含到純策略裡頭去了。我們姑且稱上表為「貝氏賽局矩陣」. 根據畫線法，我們可觀察到 $T = BR_1(LR)$, $LR = BR_2(T)$. 所以 (T, LR) 為 BNE。亦即 BNE 為「player 1 採用 T; 而 player 2 在 type 值為 1 時採用 L, type 值為 2 時採用 R.」

不清楚對手外貌的性別戰爭賽局 (1/2)



讓我們看一個有關「性別戰爭 (battle of the sexes)」的靜態貝氏賽局。這個賽局總共進行二個階段。

[第一階段/互相認識] 宅男和宅女參加一場電視相親節目。為了增加神秘感， 雙方隔著布簾，僅能透過互相發問來推測對方的外貌。

不清楚對手外貌的性別戰爭賽局 (2/2)

[第二階段/選擇約會地點] 經過第一階段之後，雙方對彼此的外貌、內涵皆有一定程度的猜測。在第二階段，主持人要求男女雙方同時做決策，選擇「棒球場 (baseball park)」或「音樂廳 (concert hall)」其中一個約會地點（註：雙方把地點寫在紙上，然後交給主持人）。假設男生比較喜歡去棒球場，女生比較喜歡去音樂廳。請問男女雙方的最佳決策為何？

Payoff Matrix (1/2)

發生機率 0.3		player 2 正妹	
		棒球場 (b)	音樂廳 (c)
player 1 帥宅	棒球場 (B)	2, 1	0, 0
	音樂廳 (C)	0, 0	1, 2

[Case 1：帥宅 vs 正妹] 雖然男生比較喜歡去棒球場，女生比較喜歡去音樂廳，但他們更希望能在一起。如果雙方選擇到不一樣的約會地點，他們的 payoff 都是 0。

發生機率 0.1		player 2 恐龍	
		棒球場 (b)	音樂廳 (c)
player 1 帥宅	棒球場 (B)	0, 1	2, 0
	音樂廳 (C)	1, 0	0, 2

[Case 2：帥宅 vs 恐龍] 如果雙方選到相同的約會地點，男生想趕快回家，所以他的 payoff 是 0。如果雙方選擇到不一樣的約會地點，女生很失望，此時她的 payoff 是 0。

Payoff Matrix (2/2)

發生機率 0.3		player 2 正妹	
		棒球場 (b)	音樂廳 (c)
player 1 肥宅	棒球場 (B)	2, 0	0, 2
	音樂廳 (C)	0, 1	1, 0

[Case 3：肥宅 vs 正妹] 如果雙方選到相同的約會地點，女生想趕快回家，所以她的 payoff 是 0。如果雙方選擇到不一樣的約會地點，男生很失望，此時他的 payoff 是 0。

發生機率 0.3		player 2 恐龍	
		棒球場 (b)	音樂廳 (c)
player 1 肥宅	棒球場 (B)	0, 0	2, 2
	音樂廳 (C)	1, 1	0, 0

[Case 4：肥宅 vs 恐龍] 如果雙方選到相同的約會地點，彼此都想趕快回家，此時雙方的 payoff 皆為 0。

Step 1: 求出貝氏賽局矩陣

機率 0.3		正 b	正 c
帥	B	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

機率 0.1		恐 b	恐 c
帥	B	0, 1	2, 0
	C	1, 0	0, 2

機率 0.3		正 b	正 c
肥	B	2, 0	0, 2
	C	0, 1	1, 0

機率 0.3		恐 b	恐 c
肥	B	0, 0	2, 2
	C	1, 1	0, 0

		player 2 策略			
		bb	bc	cb	cc
player 1 策略	BB	1.2, 0.4	2, 0.9	0, 0.7	0.8, 1.2
	BC	0.9, 1	0.8, 0.6	0.6, 0.4	0.5, 0
	CB	0.7, 0	1.2, 0.8	0.4, 1.2	0.9, 2
	CC	0.4, 0.6	0, 0.5	1, 0.9	0.6, 0.8

我們用符號 $s_1 = CB = C[\text{帥}] + B[\text{肥}]$ 表示 player 1 的策略為「如果是帥宅，就選擇音樂廳 (C); 如果是肥宅，就選擇棒球場 (B)」. 同理，我們用符號 $s_2 = bc$ 表示 $s_2 = b[\text{正}] + c[\text{恐}]$. 令 $u_1^{[k]}(C,b)$ 表示在由左往右第 k 個 normal-form game 裡頭 strategy profile 為 (C,b) 時，player 1 的 payoff。那麼 $u_1(CB,bc)$

$$= \phi(\text{帥},\text{正})u_1^{[1]}(C,b) + \phi(\text{帥},\text{恐})u_1^{[2]}(C,c) + \phi(\text{肥},\text{正})u_1^{[3]}(B,b) + \phi(\text{肥},\text{恐})u_1^{[4]}(B,c)$$

$= 0.3\times 0 + 0.1\times 0 + 0.3\times 2 + 0.3\times 2 = 0.6 + 0.6 = 1.2$. 其餘情況，自行推導。

Step 2: 用畫線法找出BNE

		player 2 策略			
		bb	bc	cb	cc
player 1 策略	BB	1.2, 0.4	2, 0.9	0, 0.7	0.8, 1.2
	BC	0.9, 1	0.8, 0.6	0.6, 0.4	0.5, 0
	CB	0.7, 0	1.2, 0.8	0.4, 1.2	0.9, 2
	CC	0.4, 0.6	0, 0.5	1, 0.9	0.6, 0.8

此時我們可對貝氏賽局矩陣採用畫線法，意即採用「定義2」的做法來求BNE。BNE 發生在雙方互相採用對手策略的 best response。我們觀察到此一賽局有二個 BNE：其中一個 BNE 為 (*CB*, *cc*)，意即：男生若為帥宅，則選擇音樂廳；若為肥宅，則選擇棒球場。而女生不論為正妹或恐龍，皆選擇音樂廳。另一個 BNE 為 (*CC*, *cb*)，意即：不論男生為帥宅或肥宅，皆選擇音樂廳。而女生若為正妹，則選擇音樂廳；若為恐龍，則選擇棒球場。註：當有多個 NE 時，通常「所有 players 的 payoff 總和最大」的那一個 NE 最可能發生。所以此例中，(*CB*, *cc*) 這個 BNE 比較可能發生。

Virtual Reality Game

硬幣匹配賽局

機率 3/4		player 2 $t_2 = 1$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	1, −1	−1, 1
	B	−1, 1	1, −1

獵鹿賽局

機率 1/4		player 2 $t_2 = 2$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	5, 5	0, 3
	B	3, 0	3, 3

考慮一個虛構的「虛擬實境」賽局：假設 player 2 的 type 值是根據玩刮刮樂彩券的結果而定：若刮到錢，type 值為 1，若沒刮到錢，type 值為 2。 假設 type 值為 1 的機率是 3/4， type 值為 2 的機率是 1/4。假設 player 2 刮到錢就去賭博，參與硬幣匹配賽局 (左表)；若沒刮到錢，player 2 就去打獵，參與獵鹿賽局 (右表)。假設 players 靠虛擬實境完成賽局，並且 player 1 只能選 T 或 B，player 2 只能選 L 或 R。假設 player 1 看不到畫面、聽不到聲音，不知道身處哪個賽局，只知硬幣匹配賽局的機率為 3/4。求此賽局的 BNE

An Example Where Pure BNE Do Not Exist

硬幣匹配賽局 機率 3/4		player 2 $t_2 = 1$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	1, −1	−1, 1
	B	−1, 1	1, −1

獵鹿賽局 機率 1/4		player 2 $t_2 = 2$	
		L	R
player 1 $t_1 = 1$	T	5, 5	0, 3
	B	3, 0	3, 3

貝氏賽局矩陣

		player 2			
		LL	LR	RL	RR
player 1	T	2, 1/2	3/4, 0	1/2, 2	−3/4, 3/2
	B	0, 3/4	0, 3/2	3/2, −3/4	3/2, 0

下表為「虛擬實境」賽局的貝氏賽局矩陣。按畫線法，此一貝氏賽局矩陣沒有 PSNE。這表示虛擬實境賽局沒有純策略的 BNE，怎辦？

根據 Nash 存在定理，此一貝氏賽局矩陣必有 MSNE。

Strategy：Mixed versus Behavioral

		player 2			
		LL	***LR***	***RL***	***RR***
player 1	***T***	**2, 1/2**	**3/4, 0**	**1/2, 2**	**−3/4, 3/2**
	B	**0, 3/4**	**0, 3/2**	**3/2, −3/4**	**3/2, 0**

◆ 經過計算 (過程省略)，我們可求出上表的 MSNE 為 player 1 採用混合策略 $\sigma_1 = 1/2[T] + 1/2[B]$, player 2 採用混合策略 $\sigma_2 = 3/4[LR] + 1/4[RR]$.

◆ 混合策略 $\sigma_2 = 3/4[LR] + 1/4[RR]$ 相當於 player 2 還沒刮彩券，不知道自己的 type 值之前，就先隨機產生一個實數 $r \in [0,1]$. 如果 $0 \le r \le 3/4$, 那麼當 player 2 的 type 值為 1 時採用 L; 當 type 值為 2 時採用 R. 如果 $3/4 < r \le 1$, 那麼不論 player 2 的 type 值為何，一律採用 R. $\Rightarrow$ 這種混合策略的做法不符合我們的直覺。我們比較想知道行為策略，也就是：等刮完彩券，知道 type 值之後，才依據 type 值來決定採用何種混合策略，例如：$s_2(t_2 = 1) = 3/4[L] + 1/4[R]$, $s_2(t_2 = 2) = [R]$. 因此我們先擱置貝氏賽局矩陣沒有 PSNE 的問題，留待第七章再來解決。

Mixed versus Behavioral：Illustrations

player 1

搞不清楚自己到底是參加
硬幣匹配賽局？
還是獵鹿賽局？

0　0.5　1

0.5　0.5

0 < *r* < 0.5　選擇 ***T***

混合策略

0.5 < *r* < 1　選擇 ***B***

player 2

玩刮刮樂

刮到錢 → 有錢就去賭一把。參與硬幣匹配賽局 → 對硬幣匹配賽局 採用混合策略 ¾[*L*] +¼[*R*]

沒刮到錢 → 沒錢就去打獵。參與獵鹿賽局 → 獵鹿賽局有 PSNE. 選擇 *R* (獵兔).

行為策略

註：此投影片所描述的行為策略和混合策略，對 **player 2** 來說是等價的。意即：不論 **player 2** 採用哪一個策略，**player 2** 所獲得的 **payoff** 期望值都一樣。但，和舉止怪異的混合策略相比，一般人會採用符合直覺的行為策略

0　0.75　1

0.75　0.25

player 2

混合策略

0 < *r* < 0.75　機率 3/4

玩刮刮樂

刮到錢 → 硬幣賽局 選擇 ***L***

沒刮到錢 → 獵鹿賽局 選擇 ***R***

0.75 < *r* < 1

玩刮刮樂

刮到錢 → 硬幣賽局 選擇 ***R***

沒刮到錢 → 獵鹿賽局 選擇 ***R***

自我評量 (1/2)

1. 假設目前僅二個廠商 F1 和 F2 在生產汽油。假設 F1 打算生產 s_1 公升，F2 打算生產 s_2 公升，其中 s_1 和 s_2 皆為正實數。按專家預估，要將 $Q = s_1 + s_2$ 公升全部銷售一空，汽油的售價須為每公升 $P(Q) = \max\{100 - Q, 0\}$. 在賽局進行前，我們假設 F1 生產一公升車的成本可能是 10，也可能 5；成本為 10 的機率為 60%，成本為 5 的機率為 40%。F2 生產一公升的成本可能是 10，也可能是 5；成本為 10 的機率為 40%，成本為 5 的機率為 60%。下表具體顯示 F1 和 F2 之間有關 type 的機率。求此賽局的 BNE。

	機率	player 2 的 type (成本)		
		10	**5**	
player 1 的 type (成本)	**10**	**0.15**	**0.45**	**0.6**
	5	**0.25**	**0.15**	**0.4**
		0.4	**0.6**	

參考答案：$s_1^*(10) = 29.103,\ s_1^*(5) = 32.18,\ s_2^*(10) = 29.49,\ s_2^*(5) = 32.565$

自我評量 (2/2)

機率 0.4		正	
		b	c
帥	B	2, 1	0, 0
	C	0, 0	1, 2

機率 0.2		恐	
		b	c
帥	B	0, 1	2, 0
	C	1, 0	0, 2

機率 0.3		正	
		b	c
肥	B	2, 0	0, 2
	C	0, 1	1, 0

機率 0.1		恐	
		b	c
肥	B	0, 0	2, 2
	C	1, 1	0, 0

2. 一男一女參加趣味相親節目，彼此在看不到對方的情況下猜測對方的外貌。最後雙方達成一致的結論：如上方四個表所示，男生為帥宅且女生為正妹的機率為 0.4，男生為帥宅且女生為恐龍的機率為 0.2，男生為肥宅且女生為正妹的機率為 0.3，男生為肥宅且女生為恐龍的機率為 0.1。接下來此一相親節目要求二人選擇約會地點，每個人可選擇去「棒球場 (B)」或音樂廳 (C)」。試求此一相親賽局的 BNE。

提示：參考投影片第 34、35 頁。